André Koch Torres Assis

Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca

Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca

André Koch Torres Assis

Apeiron
Montreal

Publicado por C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada
http://redshift.vif.com

Primeira Edição, 2008

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Assis, André Koch Torres, 1962-
Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca / Andre K.T. Assis.

Translation of: Archimedes, the center of gravity and the first law of mechanics.
Includes bibliographical references.
ISBN 978-0-9732911-7-9

1. Center of mass--Experiments. 2. Center of mass--Textbooks.
3. Mechanics--Experiments. 4. Mechanics--Textbooks. I. Title.

QA839.A87167 2008 531'.14 C2008-904613-7

Capa da frente: Gravura de 1740 com Arquimedes planejando a defesa de Siracusa. Texto em grego que aparece em sua touca: Arquimedes o geômetra.

Capa de trás: Fotografias de algumas experiências descritas neste livro. Um triângulo de papel cartão em um plano horizontal apoiado por uma vareta vertical colocada sob seu baricentro. Um retângulo e um fio de prumo suspensos por uma agulha. Um equilibrista de cabeça para baixo apoiado em sua cabeça, com massa de modelar nas mãos. Uma alavanca em equilíbrio com pesos diferentes em cada braço.

Este livro é dedicado a todos que têm trabalhado pela preservação, tradução, interpretação e divulgação da obra de Arquimedes ao longo dos séculos.

Sumário

Agradecimentos

A motivação para escrevermos este livro surgiu de cursos para aperfeiçoamento de professores de ensino fundamental e médio que ministramos nos últimos anos, dentro do projeto Teia do Saber da Secretaria de Educação do Governo do Estado de São Paulo. Foi um privilégio muito grande termos sido convidados a atuar neste programa. O apoio que recebemos por parte da Secretaria de Educação e do Grupo Gestor de Projetos Educacionais da Unicamp, assim como o contato com os alunos que participaram de nossas aulas, foram extremamente enriquecedores para nós. Também foram muito proveitosas as trocas de experiências com os colegas da Unicamp que participaram deste projeto.

A inspiração para a maior parte das experiências relacionadas com o equilíbrio e o centro de gravidade dos corpos veio dos excelentes trabalhos de Norberto Ferreira e Alberto Gaspar, [Fer], [Fer06] e [Gas03]. Foram extremamente valiosas as trocas de idéias com eles e com seus alunos, dentre os quais Rui Vieira e Emerson Santos.

Agradecemos ainda por sugestões e referências a Norberto Ferreira, Alberto Gaspar, Rui Vieira, Emerson Santos, Dicesar Lass Fernandez, Silvio Seno Chibeni, César José Calderon Filho, Pedro Leopoldo e Silva Lopes, Fábio Miguel de Matos Ravanelli, Juliano Camillo, Lucas Angioni, Hugo Bonette de Carvalho, Ceno P. Magnaghi, Caio Ferrari de Oliveira, J. Len Berggren, Henry Mendell e Steve Hutcheon, assim como aos meus alunos do Instituto de Física com quem trabalhei este tema. Minha filha e Eduardo Meirelles ajudaram com as figuras da versão em inglês, [Ass08]. Todas as figuras desta versão em português foram feitas por Daniel Robson Pinto, através de uma Bolsa Trabalho concedida pelo Serviço de Apoio ao Estudante da Unicamp, ao qual agradecemos.

Agradeço ainda ao Instituto de Física e ao Fundo de Apoio ao Ensino, à Pesquisa e à Extensão da Unicamp, que forneceram as condições necessárias para a realização deste trabalho.

André Koch Torres Assis
Instituto de Física
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
13083-970 Campinas, SP, Brasil
E-mail: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: http://www.ifi.unicamp.br/~assis

Parte I

Introdução

Um dos objetivos deste livro é o de apresentar os fenômenos básicos da mecânica através de experiências simples realizadas com materiais de baixo custo. São apresentadas as experiências elementares sobre queda de corpos, sobre equilíbrio estático e sobre oscilações ao redor das posições de equilíbrio. Além disso, chama-se atenção de como os conceitos teóricos vão sendo formados e modificados neste processo, o mesmo ocorrendo com a formulação das leis fundamentais da mecânica.

Em seguida se ilustram como fenômenos mais complexos podem ser explicados e esclarecidos em termos das experiências elementares. São apresentadas também experiências lúdicas e curiosas que estimulam a criatividade, o pensamento crítico e o senso de brincadeira na ciência. Elas também buscam relacionar fenômenos do dia a dia das pessoas com as leis básicas da física.

A ênfase é colocada em atividades experimentais. A partir delas se formulam as definições, os conceitos, postulados, princípios e leis que descrevem os fenômenos. Os materiais utilizados são bem simples, facilmente encontráveis em casa ou no comércio, sendo todos de baixo custo. Apesar disto, são realizadas experiências bem precisas e construídos equipamentos científicos muito sensíveis. Com isto o leitor não vai depender de qualquer laboratório escolar ou de pesquisa, já que ele próprio construirá seus instrumentos e realizará as medidas. Para que este objetivo seja alcançado, apresentam-se várias montagens diferentes para cada aparelho e mais de uma maneira para serem realizadas as medidas.

Caso as experiências apresentadas aqui sejam feitas em sala de aula ou em cursos de aperfeiçoamento de professores, o ideal é que sejam realizadas individualmente por cada aluno, mesmo que as atividades sejam em grupo. Isto é, na medida do possível cada aluno deve construir seus próprios equipamentos (suporte, fio de prumo, alavancas etc.), recortar suas figuras e depois levar o material para casa. Este procedimento é bem mais enriquecedor do que a simples demonstração das experiências pelo professor, quando então o aluno apenas assiste aos fenômenos sem colocar a mão na massa.

Além da parte experimental, o livro é rico em informações históricas que fornecem o contexto do surgimento de algumas leis e também os diferentes enfoques ou pontos de vista relacionados a estas leis. Toma-se um cuidado especial sobre a formação dos conceitos e princípios físicos, assim como sobre a apresentação e formulação destes conceitos e princípios. Mostra-se, por exemplo, como é difícil expressar em palavras uma definição precisa do centro de gravidade englobando o conjunto das experiências realizadas. Nesta obra toma-se um cuidado especial com as palavras que vão sendo utilizadas ao longo do texto, distinguindo-se claramente o que são definições, postulados e resultados experimentais, a diferença entre a explicação e a descrição de um fenômeno etc. Estes cuidados ilustram os aspectos humanos e sociológicos embutidos nas formulações das leis da física.

O livro é voltado para professores e alunos dos cursos de física, de matemática e de ciências. É escrito de tal forma a poder ser utilizado no ensino médio e no ensino universitário, dependendo do grau de aprofundamento com que se vê cada fenômeno ou lei da natureza. Ele tem material experimental e teórico que pode ser desenvolvido em todos os níveis de ensino. Cada professor deve escolher

o material contido aqui para adaptá-lo à sua realidade escolar. Várias das atividades podem ser utilizadas em cursos de formação ou de aperfeiçoamento de professores. Devido ao aprofundamento que o livro apresenta de diversos conceitos e princípios físicos, pode também ser utilizado com proveito em cursos de história e filosofia da ciência.

A melhor maneira de ler o livro é realizando em paralelo a maior parte das experiências aqui descritas. Não se deve simplesmente ler o relato destas montagens e atividades, mas sim tentar reproduzí-las e aperfeiçoá-las. Apesar da física conter aspectos filosóficos, teóricos e matemáticos, ela é essencialmente uma ciência experimental. É a junção de todos estes aspectos que a torna tão fascinante. Esperamos que o leitor tenha o mesmo prazer ao realizar as experiências aqui descritas que nós próprios tivemos ao implementá-las.

Caso você, leitor, goste deste material, ficaria contente se recomendasse o livro a seus colegas e alunos. Gostaria de saber como foi a realização destas atividades, a reação dos alunos etc.

Uma versão em inglês deste livro foi publicada em 2008 com o título: Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics, [Ass08].

Quando necessário usamos no texto o sinal $\equiv$ como símbolo de definição. Utilizamos o sistema internacional de unidades SI.

Capítulo 1

Vida de Arquimedes

As principais informações que vão aqui foram tiradas essencialmente de Plutarco, [Plu], Heath, [Arc02] e [Hea21], Dijksterhuis, [Dij87], assim como de Netz e Noel, [NN07]. Todas as traduções são de nossa autoria.

Arquimedes viveu de 287 a 212 a.C., tendo nascido e vivido a maior parte de sua vida na cidade de Siracusa, na costa da Sicília, atual Itália, que naquela época era parte do mundo Grego. Era filho do astrônomo Fídias, que obteve uma estimativa para a razão dos diâmetros do Sol e da Lua. A palavra "Arquimedes" é composta de duas partes: *arché*, que significa princípio, domínio ou causa original; e *mêdos*, que significa mente, pensamento ou intelecto. Se interpretarmos seu nome da esquerda para a direita ele poderia significar algo como "a mente principal." Mas na Grécia antiga era mais comum interpretarmos o nome da direita para a esquerda. Neste caso seu nome significaria "a mente do princípio," assim como o nome Diomedes significaria "a mente de Deus," [NN07, págs. 59-60].

Arquimedes passou algum tempo no Egito. É provável que tenha estudado na cidade de Alexandria, que era então o centro da ciência grega, com os sucessores do matemático Euclides, que viveu ao redor de 300 a.C.. Euclides publicou o famoso livro de geometria *Os Elementos*, entre outras obras, [Euc56]. Vários dos trabalhos de Arquimedes eram enviados a matemáticos que viviam ou que estiveram em Alexandria. O famoso museu de Alexandria, que incluía uma enorme biblioteca, uma das maiores da Antiguidade, havia sido fundado ao redor de 300 a.C. Algumas estimativas afirmam que em seu auge esta biblioteca chegou a ter mais de 500 mil rolos de papiro (com umas 20.000 palavras, na média, em cada rolo). A cidade de Alexandria ficou sobre o domínio romano de 30 a.C. até 400 d.C. Quando César ficou sitiado no palácio de Alexandria houve um incêndio que atingiu um depósito de livros. Em 391 da nossa era houve um grande incêndio nesta biblioteca e não se houve falar mais do museu e da biblioteca a partir do século V. O Império Romano foi fragmentado em duas partes, ocidental e oriental, em 395. Muitas obras de Arquimedes devem ter sido irremediavelmente perdidas neste período.

Arquimedes é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos e o

maior matemático da antiguidade. É comparável nos tempos modernos apenas a Isaac Newton (1642-1727) não apenas por desenvolver trabalhos experimentais e teóricos de grande alcance, mas pelo brilhantismo e influência de sua obra. Utilizando o método da exaustão, que é um método de se fazer integrações, Arquimedes conseguiu determinar a área, o volume e o centro de gravidade, CG, de muitos corpos importantes, resultados que nunca haviam sido obtidos antes dele. É considerado um dos fundadores da estática e da hidrostática.

A capacidade de concentração de Arquimedes é bem descrita nesta passagem de Plutarco (c. 46-122), [Plu]:

> "Muitas vezes os servos de Arquimedes o levavam contra sua vontade para os banhos, para lavá-lo e untá-lo. Contudo, estando lá, ele ficava sempre desenhando figuras geométricas, mesmo nas cinzas da chaminé. E enquanto estavam untando-o com óleos e perfumes, ele desenhava figuras sobre seu corpo nu, de tanto que se afastava das preocupações consigo próprio, e entrava em êxtase ou em transe, com o prazer que sentia no estudo da geometria."

Esta preocupação de Arquimedes com assuntos científicos em todos os momentos de sua vida também aparece em uma história muito famosa contada por Vitrúvio (c. 90-20 a.C.) em seu livro sobre arquitetura. Ela está relacionada ao princípio fundamental da hidrostática, que lida com a força de empuxo exercida por um fluido sobre um corpo imerso total ou parcialmente no fluido. Ela ilustra a maneira como Arquimedes chegou a este princípio ou ao menos como teve a intuição inicial que desencadeou a descoberta. Citamos de [Mac60, pág. 107] e [Ass96]:

> "Embora Arquimedes tenha descoberto muitas coisas curiosas que demonstram grande inteligência, aquela que vou mencionar é a mais extraordinária. Quando obteve o poder real em Siracusa, Hierão mandou, devido a uma afortunada mudança em sua situação, que uma coroa votiva de ouro fosse colocada em um certo templo para os deuses imortais, que fosse feita de grande valor, e designou para este fim um peso apropriado do metal para o fabricante. Este, em tempo devido, apresentou o trabalho ao rei, lindamente forjado; e o peso parecia corresponder com aquele do ouro que havia sido designado para isto. Mas ao circular um rumor de que parte do ouro havia sido retirada, e que a quantidade que faltava havia sido completada com prata, Hierão ficou indignado com a fraude e, sem saber o método pelo qual o roubo poderia ser detectado, solicitou que Arquimedes desse sua atenção ao problema. Encarregado deste assunto, ele foi por acaso a um banho, e ao entrar na banheira percebeu que na mesma proporção em que seu corpo afundava, saía água do recipiente. De onde, compreendendo o método a ser adotado para a solução da proposição, ele o perseguiu persistentemente no mesmo instante, saiu alegre do banho e, retornando nu para casa, gritou

> em voz alta que havia encontrado o que estava procurando, pois continuou exclamando, eureca, eureca (encontrei, encontrei)!"

Os trabalhos de Arquimedes que sobreviveram eram endereçados ao astrônomo Conon de Samos (na época vivendo em Alexandria), ao discípulo de Conon depois de sua morte, Dositeu de Pelúsia, ao rei Gelon, filho do rei Hierão de Siracusa, assim como a Eratóstenes, bibliotecário do museu de Alexandria e famoso por sua estimativa precisa do raio da Terra.

Arquimedes tinha o costume de mandar seus trabalhos juntamente com alguns textos introdutórios. Através destes textos conseguimos descobrir a ordem de algumas de suas descobertas, assim como um pouco de sua personalidade. Por exemplo, na introdução de seu famoso trabalho *O Método*, ele afirma, [Arc02, Suplemento, págs. 12-13]:

> "Arquimedes para Eratóstenes, saudações.
>
> Enviei a você em uma ocasião anterior alguns dos teoremas que descobri, apresentando simplesmente os enunciados e convidando-o a descobrir as demonstrações, as quais não forneci naquela época. (...) Escrevi as demonstrações destes teoremas neste livro e agora o envio a você. (...)"

Este hábito que tinha de enviar inicialmente apenas os enunciados de alguns teoremas, mas sem as demonstrações, pode ter levado alguns matemáticos a roubar os resultados de Arquimedes, afirmando que eram seus. Talvez por isso Arquimedes tenha enviado dois resultados falsos em uma ocasião, como afirma no prefácio de seu trabalho *Sobre as Espirais*, [Arc02, pág. 151]:

> "Arquimedes para Dositeu, saudações.
>
> As demonstrações da maior parte dos teoremas que enviei a Conon, e dos quais você me pede de tempos em tempos para lhe enviar as demonstrações, já estão com você nos livros que lhe enviei por Heracleides; e [as demonstrações] de alguns outros estão contidas no livro que lhe envio agora. Não fique surpreso por eu levar um tempo considerável antes de publicar estas demonstrações. Isto aconteceu devido ao meu desejo de comunicá-las primeiro a pessoas engajadas em estudos matemáticos e ansiosas de investigá-las. De fato, quantos teoremas em geometria que inicialmente pareciam impraticáveis, no tempo devido foram solucionados! Mas Conon morreu antes que tivesse tempo suficiente para investigar os teoremas acima; caso contrário teria descoberto e demonstrado todas estas coisas, e além disso teria enriquecido a geometria com muitas outras descobertas. Pois sei bem que ele possuía uma habilidade incomum em matemática, e que sua capacidade de trabalho era extraordinária. Mas, embora tenham passado muitos anos desde a morte de Conon, não vi qualquer um dos problemas ter sido resolvido por uma única pessoa. Desejo agora resolvê-los um por um, particularmente por haver dois dentre

> eles que são de realização impossível [errados], [o que pode servir como um aviso] para aqueles que afirmam descobrir tudo, mas não produzem demonstrações de suas afirmações, pois podem ser refutados como tendo de fato tentado descobrir o impossível.”

Muitas vezes Arquimedes passava anos até conseguir demonstrar algum teorema difícil. Ao expressar as dificuldades que encontrou podemos ver outra característica sua, a grande perseverança até conseguir alcançar seu objetivo. Por exemplo, na introdução de *Sobre Conóides e Esferóides*, afirma, [Arc02, pág. 99]:

> “Arquimedes para Dositeu, saudações.
>
> Neste livro apresentei e enviei para você as demonstrações dos teoremas restantes não incluídas no que havia lhe enviado anteriormente, e também [as demonstrações] de alguns outros [teoremas] descobertas mais tarde as quais, embora eu tivesse muitas vezes tentado investigá-los anteriormente, havia falhado em resolvê-los pois tive dificuldade em encontrar suas soluções. E este é o motivo pelo qual as próprias proposições não foram publicadas com o restante. Mas depois disto, quando os estudei com um cuidado maior, descobri as soluções onde antes havia falhado.”

Embora estes trabalhos que chegaram até nós sejam de matemática e de física teórica, a fama de Arquimedes na antiguidade deve-se aos seus trabalhos como engenheiro e como construtor de máquinas de guerra (catapulta, guindaste, espelhos ardentes etc.). Entre as invenções atribuídas a ele encontra-se um sistema de bombeamento de água conhecido como cóclea, ou parafuso de Arquimedes, usado até os dias de hoje. A palavra cóclea tem origem grega, significando caracol. Acredita-se que ele inventou este sistema de bombeamento durante sua estadia no Egito. Eram tubos em hélice presos a um eixo inclinado, acoplado a uma manivela para fazê-lo girar. Era usado na irrigação dos campos e como bomba de água.

Também construiu um planetário que ficou famoso já que com um único mecanismo hidráulico movimentava simultaneamente vários globos reproduzindo os movimentos de rotação das estrelas, do Sol, da Lua e dos planetas ao redor da Terra. Também construiu um órgão hidráulico no qual o ar dentro dos tubos era comprimido sobre a água em uma câmara de ar. Atribui-se a ele a invenção da polia composta, do elevador hidráulico e de alguns outros instrumentos mecânicos como a balança romana, com braços de comprimentos diferentes.

Diversos autores mencionam uma frase famosa de Arquimedes em conexão com suas invenções mecânicas e sua capacidade de mover grandes pesos realizando pouca força: “Dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra,” [Dij87, pág. 15]. Esta frase foi dita quando ele conseguiu realizar uma tarefa solicitada pelo rei Hierão de lançar ao mar um navio de muitas toneladas, movendo-o apenas com a força das mãos ao utilizar uma engrenagem composta de um sistema de polias e alavancas. Vamos ver o que Plutarco nos diz a respeito, [Plu]:

> "Arquimedes escreveu ao rei Hierão, de quem era amigo próximo, informando que dada uma força, qualquer peso podia ser movido. E até mesmo se gabou, somos informados, de que se houvesse uma outra Terra, indo para ela ele poderia mover a nossa Terra. Hierão ficou admirado e lhe solicitou que demonstrasse isto com uma experiência real, mostrando um grande peso sendo movido por uma pequena máquina. De acordo com este desejo Arquimedes tomou um dos navios de carga da frota do rei, o qual não podia ser retirado das docas exceto com grande esforço e empregando muitos homens. Além disso, carregou o navio com muitos passageiros e com carga total. Sentando-se distante do navio, sem fazer esforço, mas apenas segurando uma polia em suas mãos e movendo as cordas lentamente, moveu o navio em linha reta, de maneira tão suave e uniforme como se o navio estivesse no mar."

Hierão ficou tão admirado com este feito que afirmou: "A partir deste dia deve-se acreditar em tudo que Arquimedes disser," [Arc02, pág. xix].

Plutarco continua, [Plu]:

> "O rei, admirado com o feito e convencido do poder desta arte, solicitou que Arquimedes lhe construísse armas apropriadas para todos os fins de um cerco, ofensivas e defensivas. O rei nunca usou estas armas, pois passou quase toda sua vida em paz e em grande abundância. Mas toda a aparelhagem estava pronta para uso na época mais apropriada, e juntamente com ela o próprio engenheiro."

Durante a Segunda Guerra Púnica entre Roma e Cartago, a cidade de Siracusa associou-se a Cartago. Siracusa foi atacada pelos romanos em 214 a.C., comandados pelo general Marcelo. Muitas informações sobre Arquimedes sobreviveram na famosa biografia sobre Marcelo escrita por Plutarco. Marcelo atacou Siracusa por terra e pelo mar, fortemente armado. De acordo com Plutarco, [Plu]:

> "[Todos os armamentos de Marcelo] eram bagatelas para Arquimedes e suas máquinas. Ele havia projetado e construído estas máquinas não como assunto de qualquer importância, mas como meras diversões em geometria. Havia seguido o desejo e o pedido do rei Hierão, feito pouco tempo antes, tal que pudesse colocar em prática parte de suas especulações admiráveis em ciência, e para que, acomodando a verdade teórica para a percepção e o uso comum, pudesse trazê-la para a apreciação das pessoas em geral."

Em outro trecho ele afirma, [Plu]:

> "Portanto, quando os romanos assaltaram os muros de Siracusa em dois lugares simultaneamente, os habitantes ficaram paralisados de medo e de pavor, acreditando que nada era capaz de resistir a esta

> violência e a estas forças. Mas quando Arquimedes começou a manejar suas máquinas, ele lançou contra as forças terrestres todos os tipos de mísseis e rochas imensas que caíam com grande estrondo e violência, contra as quais nenhum homem conseguia resistir em pé, pois elas derrubavam aqueles sobre quem caíam em grande quantidade, quebrando suas fileiras e batalhões. Ao mesmo tempo, mastros imensos colocados para fora das muralhas sobre os navios afundavam alguns deles pelos grandes pesos que deixavam cair sobre eles. Outros navios eram levantados no ar pelos mastros com uma mão de ferro ou com um bico de um guindaste e, quando os tinha levantado pela proa, colocando-a sobre a popa, os mastros os lançavam ao fundo do mar. Ou ainda os navios, movidos por máquinas e colocados a girar, eram jogados contra rochas salientes sob as muralhas, com grande destruição dos soldados que estavam a bordo. (...) Os soldados romanos ficaram com um pavor tão grande que, se vissem uma pequena corda ou pedaço de madeira saindo dos muros, começavam imediatamente a gritar, que lá vinha de novo, Arquimedes estava para lançar alguma máquina contra eles, então viravam as costas e fugiam. Marcelo então desistiu dos conflitos e assaltos, colocando toda sua esperança em um longo cerco."

Também relacionado à defesa de Siracusa é a famosa história dos espelhos queimando os navios romanos. Arquimedes teria usado um grande espelho ou então um sistema de pequenos espelhos para atear fogo nos navios romanos ao concentrar os raios solares. Os dois relatos mais conhecidos são devidos a Johannes Tzetzes, sábio bizantino, e John Zonaras, ambas do século XII:

> "Quando Marcelo afastou seus navios do alcance dos mísseis e flechas, o velho homem [Arquimedes] construiu um tipo de espelho hexagonal, e em um intervalo proporcional ao tamanho do espelho colocou espelhos pequenos semelhantes com quatro cantos, movidos por articulações e por um tipo de dobradiça, e fez com que o espelho fosse o centro dos feixes do Sol — seu feixe de meio dia, seja no verão ou no meio do inverno. Depois disso, quando os feixes foram refletidos no espelho, ateou-se um fogo medonho nos navios, e à distância do alcance de uma flecha ele os transformou em cinzas. Desta maneira predominou o velho homem sobre Marcelo com suas armas," J. Tzetzes, citado em [Ror].

> "Finalmente, de maneira incrível, Arquimedes ateou fogo em toda a frota romana. Ao girar uma espécie de espelho para o Sol ele concentrou os raios do Sol sobre ela. E devido à espessura e lisura do espelho ele inflamou o ar a partir deste feixe a ateou um grande fogo, que direcionou totalmente sobre os navios que estavam ancorados no caminho do fogo, até que consumiu a todos eles," J. Zonaras, citado em [Ror].

Marcelo só conseguiu conquistar Siracusa depois de um cerco que durou três anos. Arquimedes foi morto por um soldado romano em 212 a.C., durante a captura da cidade pelos romanos. Marcelo havia dado ordens expressas de que a vida de Arquimedes devia ser poupada, em reconhecimento ao gênio do inimigo que tantas baixas e dificuldades lhe causou durante esta guerra. Apesar disto, um soldado acabou matando-o enquanto Arquimedes tentava proteger um diagrama contendo algumas descobertas matemáticas. A última frase de Arquimedes parece ter sido direcionada a este soldado: "Fique longe do meu diagrama," [Dij87, pág. 31]. Plutarco relata três versões diferentes que ouviu sobre sua morte, [Plu]:

> "Mas nada afligiu tanto Marcelo quanto a morte de Arquimedes, que estava então, como quis o destino, concentrado trabalhando em um problema por meio de um diagrama e, tendo fixado sua mente e seus olhos no tema de sua especulação, não percebeu a incursão dos romanos, nem que a cidade havia sido tomada. Neste estado de estudo e contemplação, um soldado, chegando até ele de maneira inesperada, mandou que o seguisse até Marcelo; o que ele se recusou a fazer até que tivesse terminado seu problema e chegado a uma demonstração. O soldado então, enfurecido, tirou sua espada e o matou. Outros escrevem que um soldado romano, correndo até ele com uma espada levantada, disse que ia matá-lo. Arquimedes, olhando para trás, implorou-lhe seriamente para esperar um pouco, para que ele não deixasse de forma inconclusa e imperfeita o trabalho que estava fazendo. Mas o soldado, não sensibilizado pelo seu pedido, matou-o instantaneamente. Outros relatam ainda que quando Arquimedes estava levando para Marcelo instrumentos matemáticos, relógios de Sol, esferas e ângulos ajustados para medir com a vista o tamanho aparente do Sol, alguns soldados, vendo-o e pensando que transportava ouro em um recipiente, o assassinaram. O certo é que sua morte muito afligiu a Marcelo; e que Marcelo sempre considerou aquele que o matou como um assassino; e que ele procurou pelos parentes [de Arquimedes] e os honrou com muitos favores."

Arquimedes expressou em vida o desejo de que em seu túmulo fosse colocado um cilindro circunscrito a uma esfera dentro dele, Figura 1.1, juntamente com uma inscrição dando a razão entre os volumes destes corpos. Podemos inferir que ele considerava a descoberta desta razão como sendo seu maior feito. Ela aparece nas Proposições 33 e 34 da primeira parte do seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro*, dois resultados extremamente importantes obtidos pela primeira vez por Arquimedes: "Proposição 33: A superfície de qualquer esfera é quatro vezes seu círculo máximo," [Arc02, pág. 39]. Isto é, em linguagem moderna, com A sendo a área da esfera e r seu raio: $A = 4(\pi r^2)$. "Proposição 34: Qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera," [Arc02, pág. 41]. Vamos expressar este resultado em linguagem moderna. Seja V_E o volume da

esfera e $V_C = \pi r^2 \cdot (r/3)$ o volume do cone de altura r e área da base dada por πr^2. O resultado de Arquimedes é então dado por $V_E = 4V_C = 4(\pi r^3/3)$. A inscrição desejada por Arquimedes em seu túmulo parece estar relacionada a um corolário que apresentou ao fim desta proposição: "Do que foi demonstrado segue-se que todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 da esfera, e sua superfície juntamente com suas bases vale 3/2 da superfície da esfera," [Arc02, pág. 43].

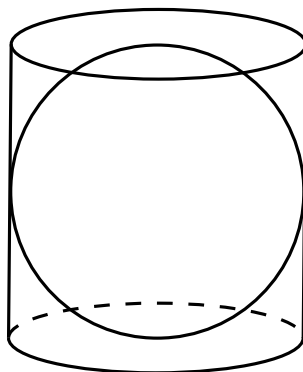



Figura 1.1: Uma esfera e o cilindro circunscrito.

Neste trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro* Arquimedes encontra inicialmente a área de uma esfera de forma independente na Proposição 33. Depois disso encontra o volume da esfera na Proposição 34. Em seu outro trabalho *O Método* há uma citação a partir da qual se descobre que originalmente ele obteve o volume da esfera e então, a partir deste resultado, resolveu o problema de encontrar a área da esfera. A Proposição 2 de *O Método* afirma o seguinte, [Arc02, Suplemento, pág. 18]:

> "(1) Qualquer esfera é (em relação ao volume) quatro vezes o cone com base igual a um círculo máximo da esfera e com altura igual ao seu raio; e
>
> (2) o cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é $1\frac{1}{2}$ vezes a esfera."

Após demonstrar que o volume do cilindro circunscrito a uma esfera é igual a 3/2 o volume da esfera, Arquimedes afirma o seguinte, [Arc02, Suplemento, pág. 20]:

> "A partir deste teorema, com o resultado de que [o volume de] uma esfera é quatro vezes tão grande quanto [o volume] do cone tendo como base um círculo máximo da esfera e com uma altura igual ao raio da esfera, concebi a noção de que a superfície de qualquer esfera é quatro vezes tão grande quanto um círculo máximo da esfera; pois, julgando a partir do fato de que [a área de] qualquer círculo é igual a

> um triângulo com base igual à circunferência e altura igual ao raio do círculo, compreendi que, da mesma maneira, [o volume de] qualquer esfera é igual a um cone com base igual à superfície da esfera e altura igual ao raio."

Ou seja, a demonstração destes teoremas como aparece em seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro* não segue a ordem em que foram descobertos.

O general Marcelo ordenou que o túmulo de Arquimedes fosse construído de acordo com seu desejo. Cícero (106-43 a.C.), o orador romano, quando foi magistrado encarregado da gestão dos bens públicos (questor) na Sicília, chegou a ver este túmulo em 75 a.C. Desde então ele nunca mais foi encontrado. Palavras de Cícero, citadas em [Ror]:

> "Mas da própria cidade Siracusa de Dionísio vou levantar da poeira — onde seu bastão traçava suas linhas — um homem obscuro que viveu muitos anos mais tarde, Arquimedes. Quando fui questor na Sicília consegui descobrir seu túmulo. Os habitantes de Siracusa não sabiam nada sobre ele e chegavam mesmo a afirmar que não existia. Mas lá estava ele, completamente cercado e escondido por galhos de arbustos e espinheiros. Me lembrei de ter ouvido algumas linhas de verso que haviam sido inscritos em seu túmulo, referindo-se a uma esfera e um cilindro modelados em pedra no topo da sepultura. E assim dei uma boa olhada ao redor dos numerosos túmulos que estavam ao lado do Portão de Agrigentino. Finalmente percebi uma pequena coluna pouco visível sobre os arbustos. Em cima dela havia uma esfera e um cilindro. Disse imediatamente aos principais habitantes de Siracusa que estavam comigo na ocasião, que acreditava que este era o túmulo que estava procurando. Foram enviados homens com foices para limpar o local e quando foi aberto um caminho até o monumento fomos até ele. E os versos ainda estavam visíveis, embora aproximadamente a segunda metade de cada linha estivesse gasta."

Capítulo 2

Obras de Arquimedes

2.1 Obras Conhecidas de Arquimedes

As obras conhecidas atualmente de Arquimedes podem ser encontradas no original em grego, assim como em latim, em [Hei15]. Uma tradução para o inglês em notação moderna encontra-se em [Arc02]. Uma outra versão encontra-se em [Dij87]. Uma tradução literal do grego para o francês encontra-se em [Mug70], [Mug71a], [Mug71b] e [Mug72]. Os trabalhos de Arquimedes já traduzidos para o português encontram-se em [Ass96], [Ass97] e [Arq04]. No Apêndice B ao final deste livro apresentamos uma nova tradução para o português da primeira parte de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*.

Até cem anos atrás, os manuscritos mais antigos e importantes ainda existentes contendo a obra de Arquimedes em grego (com exceção de *O Método*, que não aparecia em nenhum manuscrito) eram principalmente dos séculos XV e XVI, encontrando-se em bibliotecas européias. Eles foram copiados de dois outros manuscritos do século IX ou X, em grego. Um destes manuscritos do século IX ou X pertenceu ao humanista George Valla, que ensinou em Veneza entre 1486 e 1499. Este manuscrito desapareceu entre 1544 e 1564, não se sabendo atualmente se ainda existe. Ele continha as seguintes obras, nesta ordem: *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Medida do Círculo*, *Sobre Conóides e Esferóides*, *Sobre as Espirais*, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, *O Contador de Areia*, *Quadratura da Parábola*, comentários de Eutócius em relação às obras *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre a Medida do Círculo*, e *Sobre o Equilíbrio dos Planos*.

Os últimos registros do segundo manuscrito do século IX ou X foram na Biblioteca do Vaticano nos anos de 1295 e 1311. Não se sabe se ele ainda existe. Ele continha as seguintes obras, nesta ordem: *Sobre as Espirais*, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, *Quadratura da Parábola*, *Medida do Círculo*, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, comentários de Eutócius em relação à obra *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre Conóides e Esferóides*, comentários de Eutócius em relação à obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, e *Sobre os Corpos Flutuantes*. Este trabalho de Arquimedes sobre os corpos flutuantes, em duas partes, não estava contido

no manuscrito anterior.

O trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes* só era conhecido até 1906 por uma tradução para o latim feita por Willen von Mörbeke em 1269 a partir deste segundo manuscrito do século IX ou X. Ele realizou uma tradução para o latim de todas as obras de Arquimedes a que teve acesso, sendo isto muito importante para a divulgação de seu trabalho. O manuscrito original contendo a tradução de Mörbeke foi encontrado novamente em Roma em 1884, encontrando-se atualmente na Biblioteca do Vaticano.

Arquimedes escrevia no dialeto dórico. Nos manuscritos que sobreviveram sua linguagem original foi em alguns livros totalmente, em outros parcialmente, transformada para o dialeto ático comum da Grécia. A partir do século IX surgiram traduções de algumas obras de Arquimedes para o árabe. As primeiras traduções para o latim das obras de Arquimedes e de vários cientistas e filósofos gregos foram feitas a partir dos séculos XII e XIII. A imprensa de caracteres móveis foi inventada no ocidente por Gutenberg em meados do século XV. As obras de Arquimedes começaram a ser impressas no século XVI, a mais antiga sendo de 1503, contendo a *Medida do Círculo* e a *Quadratura da Parábola*. Em 1544 foi impressa a obra *Editio Princeps*, contendo a maior parte das obras conhecidas de Arquimedes, em grego e latim, com exceção de *Sobre os Corpos Flutuantes*. A invenção da imprensa deu um grande impulso para a divulgação de suas obras. As primeiras traduções de algumas obras de Arquimedes para um idioma vivo foram publicadas em 1667 e 1670 por J. C. Sturm, traduzidas para o alemão. Em 1807 surgiu a primeira tradução para o francês do conjunto de suas obras feita por F. Peyrard. Em 1897 e em 1912 foi publicada a primeira tradução para o inglês por T. L. Heath.

Apresentamos aqui as obras de Arquimedes que chegaram até nós, na ordem em que Heath supõe que foram escritas, [Hea21, págs. 22-23]. Mas existem muitas controvérsias em relação a este ordenamento. Knorr, por exemplo, coloca *O Método* como uma das últimas obras de Arquimedes, [Kno79].

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos, ou Sobre o Centro de Gravidade das Figuras Planas. Livro I.*

  Arquimedes deriva teoricamente usando o método axiomático a lei da alavanca e os centros de gravidade de paralelogramos, triângulos e trapézios. No Apêndice B ao final deste livro apresentamos uma tradução desta obra.

- *Quadratura da Parábola.*

  Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer. Proposição 24: "Todo segmento limitado por uma parábola e por uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e a mesma altura," [Arc02, pág. 251]. Ele apresenta duas demonstrações para este resultado. Na primeira faz uma quadratura mecânica, utilizando a lei da alavanca. Na segunda faz uma quadratura geométrica.

- *Sobre o Equilíbrio dos Planos, ou Sobre o Centro de Gravidade das Figuras Planas. Livro II.*

Arquimedes obtém o centro de gravidade de um segmento de parábola.

- *O Método dos Teoremas Mecânicos, endereçado a Eratóstenes.*

  Usualmente conhecido como *O Método.* Arquimedes apresenta um método mecânico utilizando a lei da alavanca e conceitos da teoria do centro de gravidade para obter resultados geométricos. Apresenta vários exemplos deste método heurístico que seguiu, ilustrando como aplicá-lo. Com isto obtém a quadratura da parábola, o volume e o CG de qualquer segmento de uma esfera, o CG de um semi-círculo, o CG de um parabolóide de revolução e vários outros resultados. Na Seção 2.2 discutimos em mais detalhes este trabalho.

- *Sobre a Esfera e o Cilindro, Livros I e II.*

  Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é igual a quatro vezes a área do círculo maior passando pelo centro da esfera, encontra a área de qualquer segmento da esfera, mostra que o volume de uma esfera vale dois terços do volume do cilindro circunscrito e que a superfície da esfera vale dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo-se as bases, Fig. 1.1. Na segunda parte deste livro o resultado mais importante de Arquimedes é mostrar como cortar uma esfera por um plano, tal que a razão dos volumes dos dois segmentos da esfera tenha um valor desejado.

- *Sobre as Espirais.*

  Arquimedes define uma espiral através do movimento uniforme de um ponto ao longo de uma reta que gira com velocidade angular constante no plano. Estabelece as propriedades fundamentais da espiral relacionando o comprimento do raio vetor com os ângulos de revolução que geram as espirais. Apresenta resultados sobre tangentes às espirais. Demonstra como calcular áreas de partes da espiral. A espiral é utilizada para obter uma retificação da circunferência.

  Como curiosidade citamos aqui as duas primeiras proposições e a definição principal apresentada por Arquimedes neste trabalho. Esta espiral é representada hoje em dia em coordenadas polares pela relação $\rho = k\varphi$, onde k é uma constante, ρ é a distância até o eixo z (ou até a origem considerando o movimento no plano xy) e φ é o ângulo do raio vetor em relação ao eixo x. Nesta representação moderna não aparece o tempo. Por outro lado, a importância histórica da definição original de espiral feita por Arquimedes é a introdução do conceito de tempo na geometria, algo crucial para todo o desenvolvimento posterior da mecânica clássica:

  > "Proposição 1: Se um ponto desloca-se com uma velocidade uniforme ao longo de qualquer linha, e são considerados dois comprimentos sobre a linha, eles serão proporcionais aos tempos para descrevê-los," [Arc02, pág. 155].

> “Proposição 2: Se dois pontos sobre linhas diferentes deslocam-se, respectivamente, ao longo de cada uma delas com uma velocidade uniforme, e se são considerados comprimentos, um em cada linha, formando pares, tal que cada par seja descrito em tempos iguais, os comprimentos serão proporcionais,” [Arc02, pág. 155].
>
> “Definição: Se uma linha reta traçada em um plano gira com uma velocidade constante ao redor de uma extremidade que permanece fixa e retorna à posição de onde começou e se, no mesmo tempo em que a linha gira, um ponto desloca-se com uma velocidade constante ao longo da linha reta começando da extremidade que permanece fixa, o ponto vai descrever uma **espiral** no plano,” [Arc02, pág. 165].

- *Sobre Conóides e Esferóides.*

  Arquimedes estuda os parabolóides de revolução, os hiperbolóides de revolução (conóides) e os elipsóides (esferóides) obtidos pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. O principal objetivo do trabalho é investigar o volume de segmentos destas figuras tridimensionais. Demonstra, por exemplo, nas Proposições 21 e 22, que o volume do parabolóide de revolução vale 3/2 do volume do cone que tem a mesma base e a mesma altura. Resultados análogos, mas mais complexos, são obtidos para o hiperbolóide de revolução e para o elipsóide.

- *Sobre os Corpos Flutuantes. Livros I e II.*

  Arquimedes estabelece os princípios fundamentais da hidrostática com a lei do empuxo, dando o peso de um corpo imerso em um fluido. Estuda também a estabilidade de um segmento esférico flutuante e de um parabolóide de revolução imerso em um fluido.

  Na primeira parte deste trabalho Arquimedes cria toda a ciência da hidrostática, não se conhecendo nenhum autor que tenha trabalhado sobre este tema antes dele. Seu postulado fundamental diz o seguinte, [Mug71b, pág. 6], ver também [Dij87, pág. 373]:

  > “Supomos como princípio que o fluido possui uma natureza tal que, estando suas partes dispostas de modo uniforme e sendo contínuas, a parte que é menos pressionada é impelida de seu lugar pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está verticalmente acima dela, a menos que este fluido esteja encerrado em qualquer [recipiente] ou que seja comprimido por qualquer outra coisa.”

  A tradução de Heath deste postulado, publicada originalmente em 1897, diz o seguinte, [Arc02, pág. 253] e [Ass96].

> "Postulado 1: Vai-se supor que um fluido tem tal propriedade que, suas partes estando situadas uniformemente e sendo contínuas, aquela parte que é menos pressionada é impelida pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está acima dela numa direção perpendicular se o fluido for afundado em qualquer coisa e comprimido por qualquer outra coisa."

Esta versão de Heath que havíamos traduzido para o português em 1996, está baseada na tradução para o latim publicada por Mörbeke em 1269, não se conhecendo então o texto original de Arquimedes em grego. Em 1906 Heiberg localizou um outro manuscrito contendo a versão original em grego deste trabalho. O manuscrito ainda tem algumas partes que estão faltando ou que estão indecifráveis. De qualquer forma, a parte legível contém este postulado. Com isto foi possível clarificar o significado da última passagem. Em vez da expressão do Heath, "e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está acima dela numa direção perpendicular se o fluido for afundado em qualquer coisa e comprimido por qualquer outra coisa," o significado correto é aquele de Mugler e Dijksterhuis, a saber, "e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está verticalmente acima dela, *a menos que* este fluido esteja encerrado em qualquer [recipiente] ou que seja comprimido por qualquer outra coisa." Ou seja, há uma expressão negativa (enfatizada em itálico) que mostra as condições que limitam a validade do postulado.

A partir deste postulado Arquimedes chega a uma explicação para o formato esférico da Terra, supondo-a composta apenas de água. Depois demonstra um teorema fundamental da hidrostática, chamado hoje em dia de princípio de Arquimedes (ou de princípio fundamental da hidrostática), em suas Proposições 5 a 7. Deve-se observar que para o próprio Arquimedes estes resultados são proposições ou teoremas derivados a partir de seu postulado fundamental que acabamos de apresentar. Ou seja, para ele as Proposições 5 a 7 não são princípios fundamentais nem postulados, mas sim resultados secundários demonstrados a partir de seu princípio fundamental. Ao afirmar que um sólido é mais pesado ou mais leve do que um fluido, ele está se referindo ao peso relativo ou específico, isto é, se o sólido é mais ou menos denso do que o fluido:

> "Proposição 5: Qualquer sólido mais leve do que um fluido ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado," traduzido em [Ass96].
>
> "Proposição 6: Se um sólido mais leve do que um fluido for forçadamente submerso nele, o sólido será impelido para cima com uma força igual à diferença entre seu peso e o peso do fluido deslocado," traduzido em [Ass96].

> "Proposição 7: Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado," traduzido em [Ass96].

Baseado nestas proposições, Arquimedes determina no final do primeiro livro as condições do equilíbrio de um segmento esférico flutuante. Na segunda parte deste trabalho Arquimedes apresenta uma investigação completa das posições de repouso e de estabilidade de um segmento de um parabolóide de revolução flutuando em um fluido. Seu interesse aqui parece bem claro, estudar a estabilidade de navios de forma teórica, embora isto não seja mencionado explicitamente. É como se fosse um trabalho de matemática aplicada ou de engenharia teórica.

Este é um trabalho monumental que por quase dois mil anos foi uma das únicas obras sobre o assunto, até ser retomado no renascimento, influenciando a Stevin (1548-1620) e Galileu (1564-1642).

- *Medida do Círculo.*

  Este trabalho não chegou em sua forma original até nós sendo, provavelmente, apenas um fragmento de um trabalho maior. Arquimedes demonstra que a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo tendo por catetos o raio e a circunferência retificada: "Proposição 1: A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo," [Arc02, pág. 91]. Em notação moderna este resultado pode ser expresso da seguinte maneira. Se chamamos de A_C à área do círculo de raio r tendo circunferência $C = 2\pi r$, e se chamamos de A_T à área do triângulo descrito por Arquimedes (dada por sua base vezes sua altura dividido por 2), então $A_C = A_T = r \cdot C/2 = \pi r^2$.

  Arquimedes mostra ainda que o valor exato de π situa-se entre $3\frac{10}{71} \approx 3,1408$ e $3\frac{1}{7} \approx 3,1429$. Obteve este resultado circunscrevendo e inscrevendo um círculo com polígonos regulares de 96 lados. Este resultado é expresso por Arquimedes com as seguintes palavras na Proposição 3, [Arc02, pág. 93]: "A razão da circunferência de qualquer círculo para seu diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$ mas maior do que $3\frac{10}{71}$." No meio da demonstração desta proposição Arquimedes apresenta também aproximações muito precisas para as raízes quadradas de diversos números, sem especificar como chegou a elas. Utiliza, por exemplo, o seguinte resultado em notação moderna: $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, isto é, $1,7320261 < \sqrt{3} < 1,7320513$.

- *O Contador de Areia.*

  Arquimedes lida com o problema de contar os grãos de areia contidos na esfera das estrelas fixas, usando resultados de Eudoxo, de seu pai Fídias e de Aristarco. Propõe um sistema numérico capaz de expressar números até o equivalente moderno de 8×10^{63}. É neste trabalho que Arquimedes

menciona que a adição das ordens dos números (o equivalente de seus expoentes quando a base é 10^8) corresponde a achar o produto dos números. Este é o princípio que levou à invenção dos logaritmos, muitos séculos depois.

É também neste trabalho que Arquimedes menciona o sistema heliocêntrico de Aristarco de Samos (c. 310-230 a.C.). O trabalho de Aristarco descrevendo seu sistema heliocêntrico não chegou aos nossos dias. Por isto apresentamos aqui a introdução ao *Contador de Areia* de Arquimedes. Esta introdução é o testemunho mais antigo e mais importante da existência de um sistema heliocêntrico na antiguidade. Devido à sua idéia extremamente importante, Aristarco é chamado hoje em dia de o Copérnico da antiguidade (embora o mais correto fosse chamar Copérnico de o Aristarco da modernidade). No final da introdução Arquimedes refere-se a um trabalho de nome *Princípios*, sendo provavelmente o título do seu trabalho contendo um sistema de numeração que havia enviado a Zeuxipus, citado na própria introdução. Este trabalho está perdido atualmente. Vamos ao texto de Arquimedes, [Dij87, págs. 362-363] e [Arc02, págs. 221-222]:

> "Existem alguns, rei Gelon, que pensam que o número de grãos de areia é infinito. Quero dizer não apenas da areia que existe em Siracusa e no restante da Sicília, mas também aquela que existe em toda região, seja habitada ou desabitada. Outros já não assumem que este número seja infinito, mas pensam que ainda não foi nomeado nenhum número que seja grande o suficiente para ultrapassar o número imenso de grãos de areia. É claro que se aqueles que têm este ponto de vista imaginassem um volume de areia tão grande quanto seria o volume da Terra, incluindo neste volume todos os mares e buracos na Terra preenchidos até uma altura igual à das maiores montanhas, eles estariam ainda menos inclinados a acreditar que qualquer número pudesse ser expresso que excedesse o número imenso de grãos desta areia. Mas tentarei mostrar por meio de demonstrações geométricas que você será capaz de seguir, que os números que nomeamos, como publicados no trabalho destinado a Zeuxipus, incluem alguns números que excedem não apenas o número de grãos de areia ocupando um volume igual ao da Terra preenchida da maneira descrita, mas também o da areia que tem um volume igual ao do cosmo. Você sabe que 'cosmo' é o nome dado pela maioria dos astrônomos à esfera cujo centro é o centro da Terra e cujo raio é igual à distância entre o centro do Sol e o centro da Terra. Esta é a explicação comum, como você já ouviu dos astrônomos. Mas Aristarco de Samos enunciou certas hipóteses nas quais resulta das premissas que o universo é muito maior do que o que acabou de ser mencionado. De fato, ele supõe que as estrelas fixas e o Sol não se movem, mas que a Terra gira na

> circunferência de um círculo ao redor do Sol, que está no centro da órbita, e que a esfera das estrelas fixas, situada ao redor do mesmo centro que o Sol, é tão grande que o círculo no qual se supõe que a Terra gira tem a mesma razão para a distância até as estrelas fixas que o centro de uma esfera tem para sua superfície. Mas é óbvio que isto é impossível; pois como o centro de uma esfera não tem magnitude, não pode ser concebido que ele tenha qualquer razão para a superfície da esfera. É provável, contudo, que Aristarco tenha querido dizer o seguinte: já que concebemos a Terra sendo, por assim dizer, o centro do universo, ele supõe que a razão que a Terra possui para o que chamamos de cosmo é igual à razão que a esfera contendo o círculo no qual se concebe que a Terra gira possui para a esfera das estrelas fixas. Pois suas demonstrações dos fenômenos concordam com esta suposição e, em particular, ele parece supor a magnitude da esfera na qual representa a Terra em movimento como sendo igual ao que chamamos de cosmo.
>
> Digo então que, mesmo se uma esfera fosse feita de areia, com uma magnitude como a que Aristarco supõe que tenha a esfera das estrelas fixas, os números nomeados nos *Princípios* ainda incluiriam alguns que ultrapassariam o número de grãos de areia que existem em um volume igual ao da esfera mencionada, desde que sejam feitas as seguintes suposições: (...)"

Além destes trabalhos, sabe-se ainda que Arquimedes escreveu outras obras que atualmente existem apenas em fragmentos ou menções sobre elas escritas por outros autores. Estas obras são as seguintes (títulos ou assuntos de que tratam):

- *O Problema Bovino.* (É contido em um epigrama comunicado por Arquimedes aos matemáticos de Alexandria em uma carta para Eratóstenes. É um problema de álgebra com 8 incógnitas. A solução completa do problema leva a um número com 206.545 dígitos.)

- *Livro de Lemas.* (Coleção de lemas importantes relacionados com figuras planimétricas.)

- *Poliedros Semi-Regulares.* (Os sólidos regulares já eram conhecidos por Platão e são descritos por Euclides em seu livro *Os Elementos*, [Euc56]. Suas faces são compostas por polígonos iguais regulares, eqüiláteros e eqüiângulos. Só existem 5 sólidos regulares: o tetraedro, o cubo, o dodecaedro, o octaedro e o icosaedro.

  Neste trabalho Arquimedes descreve a construção dos sólidos semi-regulares que descobriu. Suas faces são polígonos regulares mas tendo diferentes números de lados, como quadrados e triângulos eqüiláteros. Só existem 13 destes sólidos, todos descobertos por Arquimedes.)

- *Stomachion.* (Só sobraram fragmentos deste trabalho. Aparentemente ele é um jogo tipo tangram mas com 14 partes que se juntam para formar um quadrado. Ver alguns exemplos na Figura 2.1. Provavelmente Arquimedes se preocupou em resolver o problema de quantas formas estas 14 partes podem ser juntadas para formar novamente o quadrado. Para Netz e Noel este trabalho dá início ao cálculo combinatório, [NN07, págs. 329-366]. De acordo com estimativas modernas existem 17.152 maneiras diferentes de combinar as peças do *Stomachion* formando o quadrado, [NN07, pág. 363].)

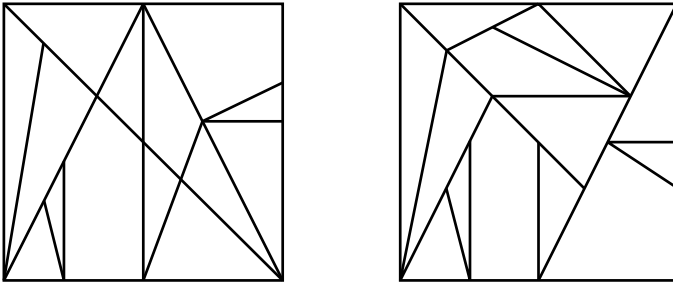



Figura 2.1: Duas configurações possíveis para o *Stomachion* de Arquimedes.

- *Área do Triângulo.* (Alguns autores consideram que Arquimedes descobriu a expressão atribuída usualmente a Heron, século I d.C., da área de um triângulo em termos de seus lados.)

- *Sobre o Heptágono em um Círculo.* (Apresenta a construção do heptágono inscrito em um círculo.)

Existem ainda algumas obras de Arquimedes mencionadas por ele ou por outros autores mas que encontram-se perdidas atualmente. Muitas vezes são mencionados por Arquimedes ou por outros autores antigos apenas os títulos e algumas vezes alguns resultados ou teoremas demonstrados nestes trabalhos. A lista a seguir pode conter o mesmo trabalho citado às vezes por nomes diferentes.

- *Princípios.* (Sobre como expressar números grandes.)

- *Sobre os Centros de Gravidade.*

- *Elementos de Mecânica.* (Sobre o CG e a lei da alavanca. Provavelmente o trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos* é uma parte deste tratado maior.)

- *Equilíbrios.* (Sobre o CG de sólidos.)

- *Livro das Colunas* ou *Livro dos Suportes.* (De acordo com Heron, Arquimedes tratou aqui de corpos apoiados em duas ou mais colunas e resolveu o problema de saber qual parte do peso total do corpo é suportada em cada pilar.)

- *Sobre Balanças* ou *Sobre Alavancas.* (Sobre o *CG* e a lei da alavanca.)
- Um trabalho sobre *Óptica.* (Inclui a lei de reflexão e estudos sobre a refração.)
- *Sobre a Construção de Esferas.* (Um trabalho mecânico descrevendo a construção de uma esfera representando os movimentos dos corpos celestes, provavelmente uma descrição do famoso planetário construído por Arquimedes.)
- *Calendário.* (Sobre a duração do ano.)
- *Sobre os Círculos que se Tocam.*
- *Sobre Linhas Paralelas.*
- *Sobre Triângulos.*
- *Sobre as Propriedades dos Triângulos Retângulos.*
- *Sobre as Suposições dos Elementos de Geometria.*
- *Livro dos Dados* ou *Definições.*

2.2 *O Método* de Arquimedes

Entre as obras atualmente conhecidas de Arquimedes, nenhuma tem chamado tanta atenção quanto *O Método.* A única informação que se tinha sobre este trabalho até 1906 era seu título. Entre 1880 e 1881 o erudito dinamarquês J. L. Heiberg (1854-1928), professor de filologia clássica na Universidade de Copenhagem, publicou a obra completa de Arquimedes então conhecida, em grego e latim, em três volumes. Esta obra serviu como base para a tradução completa recente das obras de Arquimedes para vários idiomas, como o inglês feita por T. L. Heath (1861-1940) publicada em 1897. Ao descrever as obras perdidas de Arquimedes, Heath cita *O Método* em uma única frase, [Arc02, pág. xxxviii]: "*ἐφόδιον*, um *Método*, mencionado por Suidas, que afirma que Theodosius escreveu um comentário sobre ele, mas não fornece informações adicionais." Suidas foi um dicionarista grego que viveu no século X, enquanto que Theodosius (c. 160-90 a.C.) foi um matemático da Anatólia, atual Turquia. Mas em 1899 Heiberg leu uma informação sobre um palimpsesto de conteúdo matemático localizado em Constantinopla. A palavra palimpsesto significa "raspado novamente." Em geral trata-se de um pergaminho (pele de animal raspada e polida para servir de escrita) usado duas ou três vezes, por meio de raspagem do texto anterior, devido à escassez do material ou ao seu alto preço. Este palimpsesto específico continha uma coleção de orações usadas na igreja ortodoxa oriental escritas por volta do século XIII, redigida sobre um texto manuscrito matemático do século X. Por algumas poucas linhas a que teve acesso, Heiberg suspeitou que se tratava de um texto de Arquimedes. Conseguiu viajar

a Constantinopla e examinou o manuscrito por duas vezes, em 1906 e 1908. Felizmente o texto original não tinha sido totalmente apagado com sucesso e Heiberg conseguiu ler a maior parte com o auxílio de lupas e fotografias. O manuscrito continha 185 folhas com obras de Arquimedes em grego. Além dos textos já conhecidos, continha três tesouros: (I) Fragmentos do *Stomachion*, (II) A única versão ainda existente em grego de partes importantes da obra *Sobre os Corpos Flutuantes*. Anteriormente só se conhecia a tradução para o latim feita por Willem von Mörbeke em 1269 a partir de um outro manuscrito grego atualmente perdido. (III) A maior parte do trabalho *O Método* de Arquimedes! Uma obra que estava perdida por dois mil anos (o último a estudá-la parece ter sido Theodosius), não se conhecendo nem mesmo seu conteúdo, surgiu de repente ampliando enormemente nosso conhecimento sobre Arquimedes. Até os comentários de Theodosius sobre esta obra não são conhecidos. Este manuscrito continha as seguintes obras, nesta ordem: a segunda parte de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, *Sobre os Corpos Flutuantes*, *O Método*, *Sobre as Espirais*, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Medida do Círculo*, e *Stomachion*.

Em 1907 Heiberg publicou o texto da obra *O Método* em grego e uma tradução para o alemão, com comentários de Zeuthen. Em 1912 Heath publicou um complemento à sua tradução para o inglês das obras completas de Arquimedes, incluindo agora *O Método*. Entre 1910 e 1915 Heiberg publicou uma segunda edição das obras completas de Arquimedes, em grego e latim, em três volumes. Esta segunda edição é bem melhor do que a primeira e foi reeditada em 1972, [Hei15]. A descoberta de Heiberg foi manchete do New York Times em 1907.

Mas a história não termina aqui. No período entre 1908 e 1930 o manuscrito desaparece, acreditando-se que tenha sido roubado. Ao redor de 1930 um colecionador de antiguidades francês compra o manuscrito, sem o conhecimento do mundo exterior. Em 1991 a família deste francês coloca o manuscrito para ser leiloado e só então todos ficam sabendo que se tratava do manuscrito descoberto por Heiberg em 1906 e que se considerava novamente perdido. Em 1998 ele foi leiloado pela Christie's, em Nova York. Foi comprado por cerca de 2 milhões de dólares por um bilionário anônimo e emprestado para o Walters Arts Gallery, de Baltimore, EUA. Um grupo de eruditos, dirigido por Nigel Wilson e Reviel Netz, da Universidade de Stanford, está trabalhando para a restauração, digitalização e publicação do manuscrito, que contém a única cópia existente de *O Método*, um trabalho que se considerava perdido por aproximadamente 2.000 anos!

A importância deste trabalho é que ele contém praticamente o único relato de um matemático da antiguidade apresentando o método que o levou à descoberta dos seus teoremas. Em todos os outros trabalhos só temos os teoremas apresentados em sua forma final, deduzidos com rigor lógico e com demonstrações cientificamente precisas, a partir de axiomas e de outros teoremas, sem que se saiba qual foi o caminho ou a intuição que levou ao resultado final. *O Método* alterou tudo isto. Neste caso Arquimedes apresenta o caminho que utilizou para chegar a diversos resultados importantes e difíceis de quadratura e de cubatura (obtenção de áreas e de volumes por integração), assim como ao centro de gravidade de diversas figuras geométricas. Nada melhor agora do que dar a palavra

a Arquimedes na descrição do seu trabalho, [Arc02, Suplemento, págs. 12-14]:

> "Arquimedes para Eratóstenes, saudações.
>
> Enviei a você em uma ocasião anterior alguns dos teoremas que descobri, apresentando apenas os enunciados e convidando-o a descobrir as demonstrações, que não havia fornecido naquela ocasião. Os enunciados dos teoremas que enviei naquela ocasião são como segue.
>
> (...)
>
> Além disso, vendo em você, como digo, um estudante sério, um homem de eminência considerável em filosofia, e um admirador [da pesquisa matemática], achei apropriado apresentar e explicar para você detalhadamente no mesmo livro a peculiaridade de um certo método, através do qual será possível a você ter um começo para capacitá-lo a investigar alguns dos problemas em matemática por meio da mecânica. Estou persuadido de que este procedimento não é menos útil até mesmo para a demonstração dos próprios teoremas; pois algumas coisas tornaram-se claras para mim por um método mecânico, embora tivessem de ser demonstradas depois pela geometria, pois a investigação destas coisas por este método não forneceu uma demonstração real. Mas obviamente é mais fácil fornecer uma demonstração quando já adquirimos anteriormente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrar a demonstração sem qualquer conhecimento. Este é o motivo pelo qual, no caso dos teoremas que Eudoxo foi o primeiro a descobrir as demonstrações, a saber, que o [volume do] cone é a terça parte do cilindro [circunscrito], e [o volume] da pirâmide [a terça parte] do prisma [circunscrito], tendo a mesma base e a mesma altura, devemos dar uma parte importante do crédito a Demócrito que foi o primeiro a afirmar isto com relação a esta figura, embora ele não tenha demonstrado isto. Eu próprio estou na posição de ter feito inicialmente a descoberta do teorema a ser publicado agora [pelo método indicado], e considero necessário expor o método, parcialmente por já ter falado sobre ele e não quero que se pense que proferi palavras em vão, mas também porque estou persuadido de que o método será bem útil para a matemática. Pois entendo que alguns dos meus contemporâneos ou dos meus sucessores serão capazes, por meio do método uma vez que ele esteja estabelecido, de descobrir outros teoremas adicionais, os quais ainda não ocorreram para mim.
>
> Em primeiro lugar vou apresentar o primeiro teorema que descobri por meio da mecânica:
>
> Qualquer segmento de uma parábola é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura. Após isto apresentarei cada um dos teoremas investigados pelo mesmo método. Então, no

> final do livro, apresentarei as [demonstrações] geométricas [das proposições]...
>
> [Apresento as seguintes proposições que usarei ao longo do trabalho.] (...)"

Após esta introdução sobre a vida e a obra de Arquimedes, descreveremos agora diversas experiências que levam a uma definição conceitual precisa do que vem a ser este famoso centro de gravidade dos corpos.

Parte II

O Centro de Gravidade

Capítulo 3

Geometria

Começamos nosso trabalho com um pouco de matemática. Vamos recortar algumas figuras planas e obter suas propriedades geométricas principais. Mais tarde elas serão utilizadas em algumas experiências. As dimensões que apresentamos aqui são adequadas para atividades individuais, sendo que os tamanhos devem ser maiores no caso de serem feitas experiências de demonstração em sala de aula ou em palestras e seminários.

Material Empregado

- Cartolina, papelão, cartão duro ou papel cartão plano (o papel cartão é melhor que a cartolina pois é um pouco mais espesso e, portanto, mais firme). Também pode ser usada a espuma EVA, lâminas de madeira (tipo madeira de balsa), folhas de isopor, chapas planas e finas de plástico rígido ou de alumínio etc.
- Folhas de papel em branco.
- Régua, caneta, esquadro, compasso e transferidor.

3.1 Obtendo os Centros de Círculos, Retângulos e Paralelogramos

Traçamos e recortamos no papel cartão um círculo com 7 ou 8 cm de diâmetro. Caso o círculo tenha sido traçado utilizando um compasso, marca-se depois o centro do círculo (ponto furado pelo compasso) com uma caneta, indicando-o pela letra X.

Caso o círculo tenha sido traçado utilizando um copo colocado em cima do papel cartão, pode-se encontrar o centro pelo cruzamento de dois diâmetros. Os diâmetros podem ser traçados com uma régua. Mas é difícil ter certeza se a régua está passando exatamente pelo centro, caso este centro não tenha sido localizado anteriormente.

Um procedimento alternativo para se encontrar os diâmetros e o centro do círculo utiliza dobraduras. Nas experiências que serão feitas em seguida é melhor

utilizar as figuras planas de papel cartão plano sem dobras. Todas as dobraduras devem então ser feitas com figuras análogas feitas de folha de caderno ou de papel sulfite. Coloca-se o círculo de papel cartão em cima de uma folha de papel e corta-se nesta folha um círculo igual ao que havia sido feito com o papel cartão. Depois dobra-se o círculo de papel em duas metades iguais. Faz-se então mais uma dobra para que o círculo fique dividido em quatro partes iguais, ver a Figura 3.1. Pode-se então traçar com caneta os diâmetros no círculo de papel. O centro do círculo será o cruzamento destes diâmetros. Furando-se o centro do círculo de papel e colocando-o novamente sobre o círculo de papel cartão, pode-se marcar no papel cartão com uma caneta o centro do círculo.

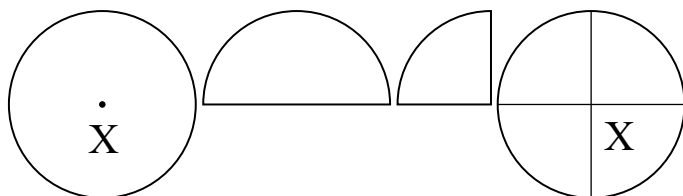



Figura 3.1: Achando o centro de um círculo com dobraduras.

Recorta-se de um papel cartão a figura de um retângulo com lados de 6 cm e de 12 cm. No caso do retângulo existem duas maneiras alternativas de se encontrar o centro. A mais simples é ligando os vértices opostos. O centro do retângulo é o cruzamento destas diagonais, que deve ser marcado pela letra X.

A outra maneira é encontrando (com uma régua ou com dobradura) inicialmente o ponto médio de cada lado. Liga-se então os pontos médios dos lados opostos. O centro do retângulo é o cruzamento destas duas retas.

O paralelogramo é um quadrilátero plano cujos lados opostos são paralelos. Recorta-se de um papel cartão uma figura na forma de um paralelogramo com lados de 6 cm e de 12 cm, com o menor ângulo interno sendo de 30° (ou de 45°). Pode-se encontrar o centro de um paralelogramo utilizando os dois métodos empregados no caso do retângulo, como na Figura 3.2.

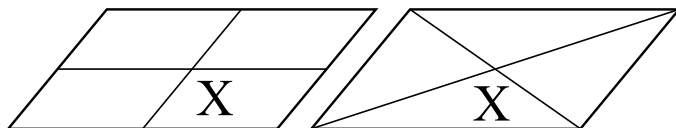



Figura 3.2: Achando o centro de um paralelogramo com dobraduras.

3.2 Os Quatro Pontos Notáveis de um Triângulo

Existem três tipos de triângulo: eqüilátero (três lados iguais), isósceles (apenas dois lados de mesmo comprimento) e escaleno (três lados diferentes). Todo

triângulo possui quatro pontos notáveis que são chamados de circuncentro (C), baricentro (B), ortocentro (O) e incentro (I). Vamos encontrar estes quatro pontos notáveis no caso de um triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 12 cm. Com estas dimensões cada um dos lados iguais terá um comprimento de 12,37 cm, Figura 3.3.

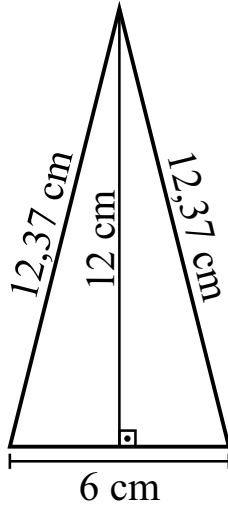



Figura 3.3: Triângulo isósceles.

Este triângulo será traçado e recortado em um papel cartão. Recortam-se também outros quatro triângulos iguais de uma folha de papel. Cada um destes triângulos de papel será utilizado para que se tracem sobre eles as retas para encontrar os pontos notáveis. Quando necessário, também as dobraduras devem ser feitas com estes triângulos de papel, para evitar que se amassem as figuras de papel cartão que serão utilizadas em experiências posteriores.

O circuncentro é o encontro das mediatrizes, que são as retas cortando cada lado no ponto médio, perpendicularmente. Para achar o ponto médio de cada lado pode-se utilizar uma régua. Com um esquadro ou utilizando o retângulo de papel cartão traça-se então uma reta perpendicular a cada lado passando por seu ponto médio. O cruzamento destas retas é o circuncentro (C), Figura 3.4.

Outra maneira de se encontrar o ponto médio de cada lado é com dobradura. Neste caso basta que se juntem os vértices dois a dois. A dobra do papel já será a reta ortogonal ao lado entre os vértices e passando pelo centro de cada lado, o que facilita o trabalho.

Uma propriedade importante do circuncentro é que ele é eqüidistante dos vértices. Por este motivo ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, chamada de circuncírculo, Figura 3.4.

Em todo triângulo acutângulo (que possui os três ângulos agudos, ou seja, menores do que 90°), o circuncentro estará localizado no região interna do triângulo. No triângulo obtusângulo (que possui um ângulo obtuso, ou seja, maior

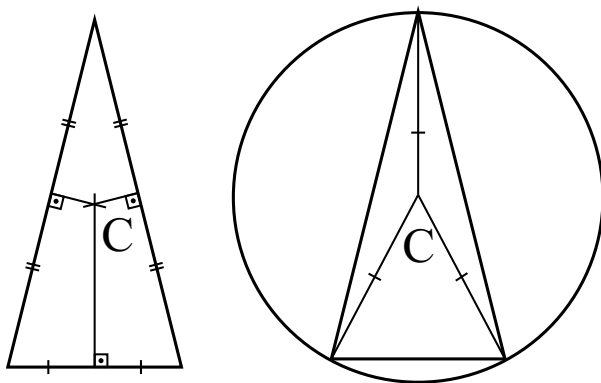



Figura 3.4: O circuncentro e o circuncírculo.

do que 90°), o circuncentro estará localizado na região externa ao triângulo. No triângulo retângulo, o circuncentro estará localizado no ponto médio da hipotenusa.

O baricentro é o encontro das medianas, que são as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos. Como vimos no caso do circuncentro, os pontos médios de cada lado podem ser facilmente obtidos com uma régua ou com dobraduras. Após encontrar estes pontos médios, basta que eles sejam ligados aos vértices opostos. O cruzamento destas retas é o baricentro (B), ver a Figura 3.5. O baricentro está sempre dentro do triângulo e possui uma propriedade importante: A distância do vértice ao baricentro é sempre o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice.

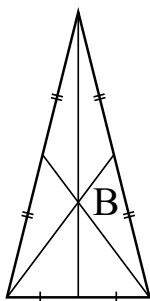



Figura 3.5: O baricentro de um triângulo.

O ortocentro é o encontro das alturas, que são as retas que ligam os vértices perpendicularmente aos lados opostos. A maneira mais fácil de encontrar estas retas é utilizando um esquadro ou o retângulo de papel cartão. Vai-se escorregando com a base do esquadro ou do retângulo por um dos lados do triângulo (com a base do esquadro ou do retângulo coincidindo com o lado do triângulo) até que o lado perpendicular do esquadro ou do retângulo encontre

o vértice oposto do triângulo. Neste momento traçam-se estas retas que vão dos vértices até os lados opostos, sendo perpendiculares a estes lados, Figura 3.6. O cruzamento das alturas é o ortocentro (O). As alturas representam também as menores distâncias entre os vértices e os lados opostos. Dependendo das dimensões do triângulo, o ortocentro pode se localizar dentro ou fora do triângulo.

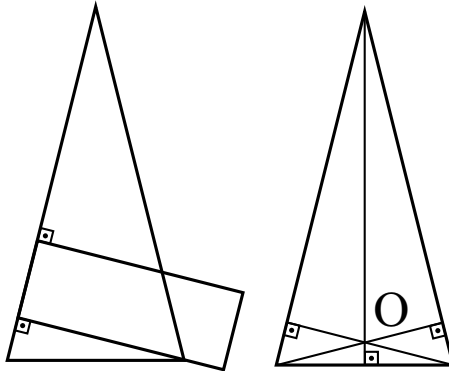



Figura 3.6: O ortocentro.

O incentro é o encontro das bissetrizes, que são as retas que dividem os vértices em dois ângulos iguais. Estas retas podem ser encontradas com o auxílio de um transferidor. Mas a maneira mais prática de localizá-las é com dobraduras. Basta que se encontrem pelos vértices os lados vizinhos do triângulo, Figura 3.7. As dobras do papel dividem cada vértice em dois ângulos iguais. O cruzamento destas retas é o incentro (I).

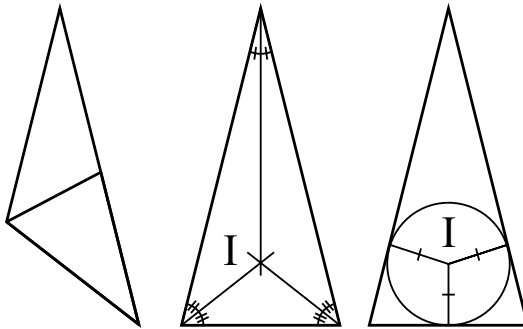



Figura 3.7: O incentro e o incírculo.

O incentro sempre localiza-se dentro do triângulo. O incentro é eqüidistante dos lados. Por este motivo ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo, também chamada de incírculo, Figura 3.7.

Depois que estes quatro pontos foram localizados nos triângulos de papel,

fura-se os papéis nestes pontos e colocam-se os triângulos de papel sobre o triângulo de papel cartão. Em seguida marcam-se sobre o triângulo de papel cartão os quatro pontos notáveis. O resultado no caso deste triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 12 cm é mostrado na Figura 3.8. Vemos que os quatro pontos são distintos entre si, com o ortocentro mais próximo da base, depois o incentro, depois o baricentro e por último o circuncentro. Estes quatro pontos estão sobre uma reta que é ao mesmo tempo mediatriz, mediana, altura e bissetriz.

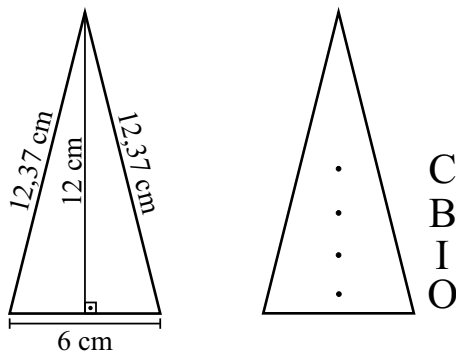



Figura 3.8: Um triângulo isósceles e seus quatro pontos notáveis.

No caso de um triângulo eqüilátero estes quatro pontos se sobrepõem, Figura 3.9a.

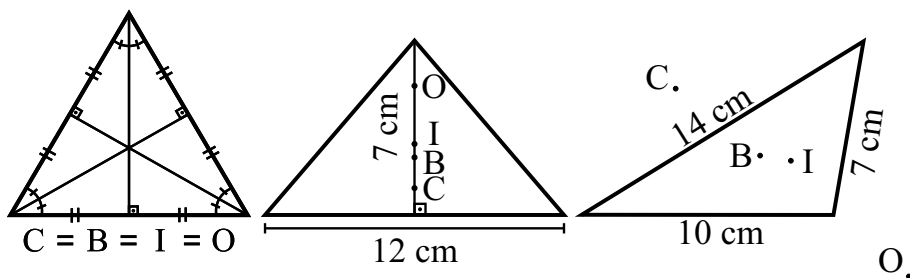



Figura 3.9: Os quatro pontos notáveis em alguns casos particulares.

No caso de um triângulo isósceles com base de 12 cm e altura de 7 cm a ordem dos pontos em relação à base é invertida quando comparada com os pontos do triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 12 cm, Figura 3.9b.

No caso de um triângulo escaleno estes quatro pontos não estão ao longo de uma reta e também não estão necessariamente todos dentro do triângulo, como pode ser visto pela Figura 3.9c, baseada em um triângulo obtusângulo com lados de 7 cm, 10 cm e 14 cm. Vemos que o baricentro e o incentro estão dentro do triângulo, enquanto que o circuncentro e o ortocentro estão fora dele.

Capítulo 4

Experiências de Equilíbrio e Definição do Centro de Gravidade

4.1 Primeiro Procedimento Experimental para se Encontrar o Centro de Gravidade: Experiências com Figuras Planas

Até o momento lidamos apenas com geometria. A partir de agora começamos a realizar experiências. A maior parte das experiências descritas aqui foram inspiradas nos excelentes trabalhos de Ferreira e Gaspar, que recomendamos fortemente: [Fer], [Fer06] e [Gas03].

Vamos precisar de alguns conceitos primitivos, isto é, conceitos que não podemos definir sem cair em círculos viciosos. Os conceitos primitivos que vamos usar são o de corpo, disposição relativa de corpos (corpo B localizado entre os corpos A e C, por exemplo), distância entre corpos, mudança da disposição relativa entre os corpos e tempo entre eventos físicos.

Experiência 4.1

Seguramos uma moeda e a soltamos do repouso em uma certa altura do solo. Observa-se que a moeda cai em direção à Terra, 4.1. O mesmo ocorre com qualquer uma das figuras de papel cartão (círculo, retângulo ou triângulo).

Esta é uma das experiências mais simples e mais importantes de toda a mecânica. Nem todos os corpos caem ao serem soltos no ar. Uma bexiga cheia de hélio ou um balão cheio de ar quente, por exemplo, sobem ao serem soltos no ar, afastando-se da Terra. Porém, caso fossem soltos no vácuo, também cairiam em direção à Terra. Neste livro vamos realizar todas as experiências ao ar livre e todos os corpos que consideraremos serão aqueles que caem ao serem soltos.

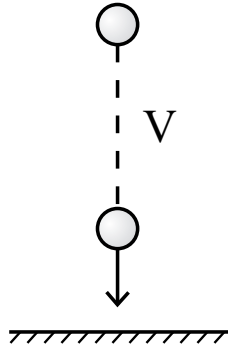



Figura 4.1: A vertical (V) é definida como a direção de queda dos corpos em direção ao centro da Terra.

Definições

Definimos agora alguns conceitos que usaremos em todo este trabalho. Estes conceitos já estão implícitos na descrição da experiência anterior e também surgem na descrição de diversas outras experiências que realizaremos ao longo deste trabalho.

- **Corpo rígido:** Qualquer corpo cujas partes não mudam de posição relativa entre si enquanto o corpo está parado ou enquanto se desloca em relação a outros corpos. O triângulo de papel cartão, por exemplo, pode ser considerado um corpo rígido para os propósitos deste livro. Mesmo enquanto o triângulo cai girando em relação à Terra, as partes do triângulo permanecem fixas entre si (a distância entre dois pontos quaisquer do triângulo permanece constante no tempo etc.). Já um gato andando no solo ou caindo em direção à Terra não pode ser considerado um corpo rígido, pois suas patas e seu rabo deslocam-se entre si durante estes movimentos. Na maior parte das experiências deste livro lidaremos com corpos rígidos, mas em alguns casos lidaremos com corpos compostos (como no caso da balança, do ET etc.). Quando nos referirmos a um "corpo," em geral queremos dizer "corpo rígido," a menos que seja especificado algo diferente.

- **Movimento e repouso:** Dizemos que dois corpos A e B estão em movimento (repouso) relativo entre si, quando a distância entre eles varia (não varia) com a passagem do tempo. Aqui estamos supondo corpos pontuais tais que se possa desprezar seus tamanhos ou diâmetros em comparação com a distância entre eles. No caso de corpos tridimensionais reais vão existir várias distâncias entre suas partículas diferentes. Neste caso dizemos que A e B estão em movimento (repouso) relativo entre si quando a distância entre uma partícula i qualquer do corpo A e uma partícula j qualquer do corpo B varia (não varia) com a passagem do tempo. Neste livro vamos em geral falar do movimento ou do repouso de um corpo em

relação à Terra. Quando dizemos que um corpo está em repouso (movimento), em geral queremos dizer que ele está parado (em movimento) em relação à Terra. O mesmo deve ser entendido para todas as partes do corpo em relação a todas as partes da Terra.

- **Equilíbrio:** Em geral vamos nos referir ao equilíbrio como sendo a falta de movimento em relação à Terra. Isto é, ao dizer que um corpo está em equilíbrio, queremos dizer que todas as suas partes permanecem em repouso em relação à Terra com a passagem do tempo. Ou seja, todas as partes de um corpo dito em equilíbrio permanecem paradas em relação à Terra, não se aproximando nem se afastando dela, nem deslocando-se horizontalmente em relação à Terra. Enquanto o triângulo está parado em nossas mãos, dizemos que ele está em equilíbrio. Enquanto está caindo, deixa de estar em equilíbrio.

- **Gravidade:** Nome que se dá à propriedade que faz com que os corpos caiam em direção à Terra ao serem soltos do repouso. Outra maneira de expressar isto é dizer que a gravidade é a tendência dos corpos em serem atraídos em direção ao centro da Terra.

- **Descer e subir:** Quando dizemos que um corpo desce (sobe), queremos dizer que ele está se aproximando (se afastando) da superfície da Terra com a passagem do tempo. Em vez de descer, podemos usar também verbos análogos como cair, tombar, se aproximar da Terra ou se inclinar em direção à Terra, por exemplo. Da mesma maneira, em vez de subir, podemos usar verbos análogos como levantar ou se afastar da Terra, por exemplo.

- **Em cima e embaixo, superior e inferior:** Quando dizemos que um corpo A está em cima de um corpo B, queremos dizer que o corpo B está entre a Terra e o corpo A. Quando dizemos que um corpo A está abaixo de um corpo B, queremos dizer que o corpo A está entre a Terra e o corpo B. Quando nos referimos à parte superior (inferior) de um corpo, queremos dizer sua parte mais (menos) afastada da superfície da Terra.

- **Vertical:** Linha reta definida pela direção seguida por um pequeno corpo (como uma moeda metálica) ao cair em direção à Terra pela ação da gravidade, partindo do repouso. É também a linha seguida por um corpo que sobe em relação à Terra ao ser solto do repouso (como uma bexiga cheia de hélio, em uma região sem vento). Ou seja, a vertical (V) não é uma linha reta qualquer. É uma linha reta bem específica que está ligada com a gravidade da Terra. Para diminuir a influência do ar e do vento o ideal é realizar esta experiência com corpos pequenos e densos como moedas, Figura 4.1.

- **Horizontal:** Qualquer reta ou plano ortogonal à reta vertical.

Deve ser ressaltado que todos estes conceitos estão ligados à Terra, indicando propriedades físicas relacionadas à interação gravitacional dos corpos com a

Terra. Ou seja, não são conceitos abstratos ou puramente matemáticos. São conceitos definidos a partir de experiências mecânicas realizadas na Terra.

É importante apresentar explicitamente todos estes conceitos pois serão utilizados ao longo deste trabalho. Apesar disto, deve ser enfatizado que estas são idealizações que não se encontram exatamente assim na natureza. Por exemplo, nenhum corpo é verdadeiramente rígido. Mesmo quando um livro está parado em cima de uma mesa, suas moléculas estão vibrando. Neste sentido, nenhum corpo está verdadeiramente em equilíbrio, já que sempre existirão partes deste corpo deslocando-se em relação à superfície da Terra, mesmo quando o corpo como um todo, macroscopicamente, não esteja se deslocando em relação à Terra. Ao ser apoiado sobre um pequeno suporte como será descrito a seguir, todo corpo sempre vai se curvar um pouco, mesmo que seja uma chapa metálica. Apesar disto, para fenômenos em escala macroscópica estes detalhes (como as vibrações das moléculas, ou a pequena curvatura sofrida pelo corpo) nem sempre são observáveis ou nem sempre são relevantes para o que está sendo analisado. Logo, os conceitos definidos anteriormente fazem sentido a nível macroscópico e devem ser entendidos assim.

Suporte para as experiências

Após estas definições podemos prosseguir com as experiências concentrando-nos nos fenômenos que levam à definição do centro de gravidade. Para isto vamos precisar de um suporte para apoiar as figuras planas de papel cartão já recortadas. Apresentamos aqui diversas possibilidades de construí-lo.

- **Suporte de palito de churrasco:** Usamos um pouco de massa de modelar como base e fincamos o palito de churrasco de madeira na vertical, com a ponta para baixo, ver a Figura 4.2. É importante ressaltar que a ponta deve ficar para baixo, caso contrário fica muito difícil realizar as experiências de equilíbrio que serão apresentadas a seguir. Em vez da massa de modelar pode-se fincar o palito em uma borracha ou em alguma outra base apropriada.

- **Suporte de lápis:** Coloca-se um lápis com a ponta para baixo em um apontador, tal que o lápis fique parado na vertical.

- **Suporte de garrafa pet:** Caso as figuras de papel cartão sejam grandes (dimensões típicas da ordem de 20 cm ou de 40 cm, tamanho apropriado para que o professor faça demonstrações em sala de aula), pode-se utilizar uma garrafa de refrigerante como suporte, com a figura apoiada sobre a tampa, ver a Figura 4.2. Se a garrafa for de plástico, é bom enchê-la com um pouco de água para que não tombe enquanto realizamos as experiências.

- **Suporte de arame:** Uma outra possibilidade interessante é utilizar um arame vertical com a base de sustentação em espiral, ver a Figura 4.2. Caso o arame seja rígido mas muito fino, fica muito difícil conseguir equilibrar

as figuras na horizontal (ele também pode furar as folhas de isopor etc.). O ideal é utilizar uma arame mais grosso.

- **Suporte de prego:** Basta um prego na vertical fincado em uma rolha, borracha, tábua de madeira ou outra base apropriada. A cabeça do prego deve estar para cima, com a ponta fincada na base.

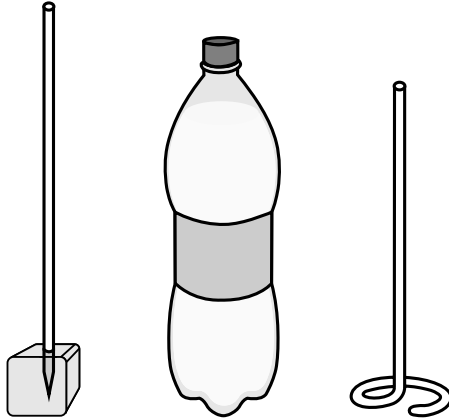



Figura 4.2: Suportes para as experiências.

Existem infinitas outras possibilidades. Os aspectos importantes a ressaltar são que o suporte fique firme na base de sustentação, que o suporte fique na vertical, que sua extremidade superior seja plana (ficando na horizontal) e pequena comparada com as dimensões das figuras que serão equilibradas sobre ele. Mas a extremidade superior não pode ser muito pequena, análoga a um ponto (como os casos do palito de churrasco, alfinete, agulha ou prego com as pontas para cima). Caso isto ocorra, fica muito difícil de conseguir equilibrar as figuras e as experiências podem falhar. A extremidade superior deve ser pequena para que o ponto de equilíbrio do corpo fique bem localizado, mas não deve ser pequena demais senão inviabiliza boa parte das experiências. Com um pouco de prática é possível encontrar facilmente as dimensões apropriadas.

Primeiro Procedimento Experimental para se Encontrar o Centro de Gravidade

Apresentamos agora o primeiro procedimento experimental para se encontrar o centro de gravidade de figuras planas.

Experiência 4.2

Pegamos o círculo, o retângulo e o paralelogramo de papel cartão já recortados e tentamos equilibrá-los na horizontal apoiando-os sobre o suporte vertical.

No caso do círculo, por exemplo, o colocamos deitado sobre o suporte e o soltamos do repouso. Observamos que ele sempre cai, exceto quando o suporte está sob o centro do círculo. Ou seja, quando o centro do círculo está apoiado sobre o suporte, podemos soltar o círculo que ele não cairá em direção à Terra (como havia acontecido na experiência anterior com a moeda), mas permanecerá em repouso equilibrado pelo suporte. Em todas as figuras planas que já analisamos, observa-se que existe um único ponto que deve ficar sobre o suporte para que a figura permaneça parada horizontalmente ao ser solta do repouso. Da experiência vem que no caso do retângulo e do paralelogramo este ponto também é o centro destas figuras, como ocorreu com o círculo, Figura 4.3.

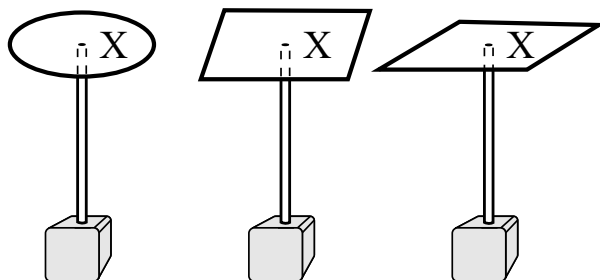



Figura 4.3: O círculo, o retângulo e o paralelogramo só permanecem em repouso quando os suportes estão sob seus centros.

Como curiosidade histórica vale informar que Arquimedes foi o primeiro a demonstrar teoricamente que o centro de gravidade dos círculos coincide com o centro dos círculos, e que o centro de gravidade dos paralelogramos (retângulos e quadrados são casos particulares de paralelogramos) é o ponto de cruzamento de suas diagonais. No Lema 7 de *O Método*, por exemplo, afirma: "O centro de gravidade de um círculo é o ponto que também é o centro [do círculo]," [Arc02, Suplemento, pág. 15]. Proposição 9 de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*: "Em todo paralelogramo o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando os pontos médios dos lados opostos do paralelogramo," ver o Apêndice B. Proposição 10 deste trabalho: "Em todo paralelogramo o centro de gravidade é o ponto de encontro das diagonais."

Estes corpos ficaram equilibrados apenas quando o suporte estava sob seus centros, sendo que o equilíbrio está ligado com a gravidade terrestre. Uma primeira idéia seria a de chamar os centros dos corpos de seus "centros de gravidade." A partir do resultado da próxima experiência e de sua análise veremos que vai ser necessário alterar esta definição. Mas por hora pode-se dizer destas experiências que apenas quando os corpos são apoiados por seus centros eles permanecerão em equilíbrio ao serem soltos do repouso. Fazemos então uma primeira definição provisória:

Definição Provisória $CG1$**:** Chamamos de centro de gravidade de um corpo ao seu centro geométrico. Ele ponto será representado nas figuras pelas

letras CG.

Experiência 4.3

Equilibramos agora um triângulo qualquer sobre o suporte. Pode ser um triângulo eqüilátero, isósceles ou escaleno. Como exemplo concreto vamos considerar o triângulo isósceles de base a e altura b que já foi recortado em papel cartão (a = 6 cm e b = 12 cm). Este triângulo possui seus quatro pontos notáveis bem separados. Utilizamos agora um apoio de palito de churrasco como suporte inferior. Assim podemos verificar claramente onde fica o ponto de equilíbrio do triângulo quando ele é solto do repouso, colocado em um plano horizontal, apoiado apenas em uma pequena região pelo suporte. Vemos que os triângulos sempre caem, exceto quando são apoiados pelo baricentro, ver a Figura 4.4. Mesmo quando são apoiados pelo circuncentro, pelo ortocentro, pelo incentro ou por qualquer outro ponto (que não seja o baricentro), vem da experiência que os triângulos caem.

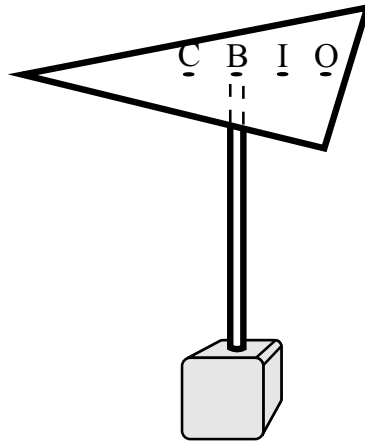



Figura 4.4: Só podemos equilibrar um triângulo horizontal ao apoiá-lo pelo baricentro.

Novamente, Arquimedes foi o primeiro a demonstrar teoricamente que o centro de gravidade de qualquer triângulo coincide com a intersecção das medianas. Vejamos a Proposição 13 de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*: "Em todo triângulo, o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto," ver o Apêndice B ao final deste livro. Proposição 14: "Em todo triângulo o centro de gravidade é o ponto de encontro das linhas retas ligando os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos]."

Será que podemos dizer que o baricentro de um triângulo é seu centro geométrico? Todo triângulo possui um centro geométrico? Para responder a esta pergunta precisamos saber o que entendemos por centro geométrico. Intuitivamente pensamos no centro geométrico como sendo algum ponto de simetria do

corpo. Para quantificar esta idéia qualitativa de simetria, podemos pensar no centro X de um retângulo. Vamos pensar em uma reta AXB passando por X, inclinada de um ângulo θ em relação à base e dividindo o retângulo em duas partes de áreas A_1 e A_2, Figura 4.5.

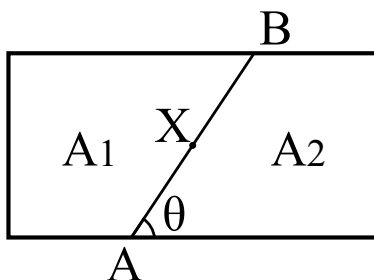



Figura 4.5: O centro geométrico X de um retângulo: Igualdade entre os segmento AX e XB, assim como igualdade entre as áreas A_1 e A_2, para qualquer ângulo θ.

Existem dois critérios pelos quais podemos dizer que X é o centro geométrico do retângulo. (I) A reta AXB é sempre dividida em dois segmentos iguais pelo ponto X. Ou seja, $AX = XB$, para todo ângulo θ. (II) A reta AXB sempre divide o retângulo em duas áreas iguais. Isto é, $A_1 = A_2$, para todo ângulo θ. Estas duas propriedades não vão ocorrer para qualquer outro ponto do retângulo, somente para seu centro X. Representemos por P um outro ponto qualquer do retângulo, diferente do seu centro X. Um segmento de reta APB pode ser dividido ao meio pelo ponto P quando esta reta está inclinada de um certo ângulo θ_I em relação à base do retângulo, mas isto deixará de ser válido quando alteramos a inclinação da reta. Um outro segmento reta CPD pode dividir o retângulo em duas áreas iguais quando esta reta está inclinada de um certo ângulo θ_{II} em relação à base do retângulo mas, novamente, isto deixará de ser válido quando alteramos a inclinação desta reta. Concluímos então que o retângulo possui um único centro, o mesmo ocorrendo com um círculo e com algumas outras figuras simétricas como um paralelogramo ou uma elipse.

Por outro lado, os critérios (I) e (II) do parágrafo anterior não são verificados para qualquer ponto P de um triângulo dado. Ou seja, dado um triângulo qualquer, não vai existir nenhum ponto P_I pertencente a ele tal que todas as retas passando por P_I satisfaçam ao critério (I). Também não vai existir nenhum ponto P_{II} pertencente ao triângulo tal que todas as retas passando por P_{II} satisfaçam ao critério (II). Neste sentido pode-se dizer que nenhum triângulo possui um centro geométrico, sendo que todo triângulo possui apenas quatro pontos notáveis.

Para ilustrar isto vamos considerar o triângulo isósceles $V_1V_2V_3$ de base a e altura b. A área deste triângulo vale $ab/2$. A mediana ligando o centro da base ao vértice superior V_2 é dividida ao meio por um ponto P localizado a uma distância $b/2$ da base e do vértice superior. Um segmento de reta paralelo à

base passando por P e limitado pelos lados do triângulo também é dividido ao meio por P. Por outro lado, o segmento de reta V_1PQ (onde Q é o ponto sobre a reta V_2V_3 cortada pela reta que passa por V_1 e por P) não é dividido ao meio por P, ver a Figura 4.6. Ou seja, o critério (I) não é satisfeito por P.

Também o critério (II) não é satisfeito por P. Embora a reta passando por V_2 e por P divida o triângulo em duas partes de áreas iguais, a reta paralela à base passando por P não divide o triângulo em duas partes de áreas iguais. O triângulo superior possui apenas um quarto da área total, enquanto que o trapézio inferior possui três quartos da área total, Figura 4.6.

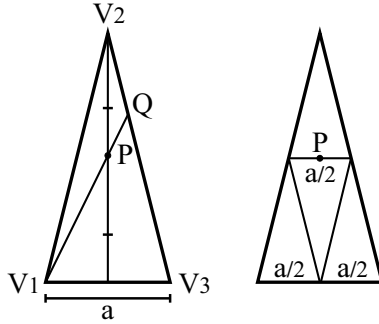



Figura 4.6: Os critérios (I) e (II) não são válidos para qualquer ponto P de um triângulo.

O baricentro B está localizado a uma distância $b/3$ do ponto médio da base e a uma distância de $2b/3$ do vértice superior. Logo de cara observa-se que ele não satisfaz ao critério (I) dado anteriormente. As retas ligando B a qualquer um dos vértices dividem o triângulo em duas partes de áreas iguais. Mas isto já não vai ocorrer, por exemplo, para uma reta paralela à base passando por B, Figura 4.7.

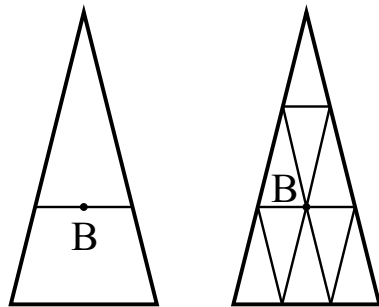



Figura 4.7: O segmento paralelo à base e passando pelo baricentro divide o triângulo em duas figuras que possuem áreas diferentes.

Neste caso a área do triângulo superior tem o valor de quatro nonos da área total, enquanto que a área do trapézio inferior possui uma área de cinco nonos

da área total. Para confirmar isto utilizando as propriedades dos triângulos sem fazer as contas, basta recortar nove triângulos isósceles iguais, cada um com uma base de comprimento $a/3$ e altura $b/3$ (área de $ab/18$). Com quatro destes pequenos triângulos conseguimos preencher o triângulo superior e com cinco destes pequenos triângulos conseguimos preencher o trapézio inferior, Figura 4.7.

Mesmo o triângulo mais simétrico de todos, o eqüilátero, não possui um centro geométrico que satisfaça ao critério (I) ou ao critério (II) dados anteriormente. Neste caso os quatro pontos notáveis coincidem no baricentro B do triângulo. Já vimos no parágrafo anterior que o baricentro de um triângulo isósceles não satisfaz a nenhum destes critérios. Como o triângulo eqüilátero é um caso particular de um triângulo isósceles, vem automaticamente que o baricentro de um triângulo eqüilátero também não satisfará a nenhum destes critérios. Apesar disto, pode-se dizer que o triângulo eqüilátero possui um centro de simetria dado por $C = B = O = I$. Embora este ponto não satisfaça aos dois critérios apresentados anteriormente, há uma simetria de rotação (qualquer característica do triângulo repete-se a cada 120^o) ao redor deste ponto. Logo, pode-se dizer que o baricentro de um triângulo eqüilátero é seu centro de simetria.

Concluímos então que um triângulo não possui um centro geométrico definido de acordo com os critérios apresentados anteriormente. Apesar disto, vem da experiência que todo triângulo fica equilibrado horizontalmente ao ser apoiado colocando um pequeno suporte sob o baricentro. Isto não ocorre ao colocarmos o suporte sob nenhum outro ponto do triângulo com seu plano na horizontal. Isto sugere que alteremos nossa definição anterior de centro de gravidade. Apresentamos a seguir uma segunda definição provisória do centro de gravidade. Ela é mais precisa do que a idéia apresentada anteriormente, de que o CG seria o centro geométrico do corpo.

Definição Provisória $CG2$: O centro de gravidade é o ponto no corpo tal que se o corpo for apoiado por este ponto e solto do repouso, vai permanecer em equilíbrio em relação à Terra.

Mais adiante teremos de alterar novamente esta definição por um conceito mais geral. Mas por hora ela serve aos nossos propósitos. Das experiências realizadas até aqui vem que todo corpo possui um único ponto tal que se o corpo for colocado sobre um pequeno suporte colocado embaixo deste ponto e solto do repouso, o corpo vai permanecer em equilíbrio, ponto este chamado de centro de gravidade do corpo. Caso o corpo seja solto apoiado por qualquer outro ponto ele não permanecerá em repouso, mas tombará em direção à Terra. Das experiências vem que no caso de círculos, retângulos e paralelogramos este ponto coincide com o centro destes corpos, enquanto que para os triângulos ele coincide com o baricentro.

Uma outra maneira de pensar no centro de gravidade está relacionada ao seu peso. Apenas em uma parte posterior deste livro vamos quantificar esta

grandeza e mostrar como ela é medida. Mas todos temos uma noção intuitiva do peso de um corpo como sendo uma medida quantitativa da força gravitacional. Dizemos que um corpo A é mais pesado do que um corpo B quando é mais difícil manter A em uma certa altura do solo do que manter B à mesma altura. Esta dificuldade pode ser indicada pelo nosso suor, pelo cansaço que sentimos no braço esticado segurando o corpo, ou na deformação que o corpo A ou B exercem sobre o suporte que os apóia (no caso do suporte ser um corpo flexível como uma mola, por exemplo).

Nas Figuras anteriores vemos que todo o peso do círculo, retângulo, paralelogramo ou do triângulo estão suportados pelo palito de churrasco colocado sob um único ponto debaixo destes corpos. Podemos então apresentar uma nova definição provisória de CG.

Definição Provisória $CG3$: Chamamos de centro de gravidade de um corpo ao ponto de aplicação da força gravitacional. Ou seja, é o ponto neste corpo onde atua toda a gravidade, o ponto onde se localiza o peso do corpo. Ele também pode ser chamado de centro do peso deste corpo.

O fato de um triângulo não possuir um centro geométrico leva a uma conclusão importante que será explorada na próxima experiência.

Experiência 4.4

Vimos que nem toda reta que passa pelo baricentro de um triângulo o divide em duas áreas iguais. Como estamos lidando com figuras planas homogêneas, o peso de qualquer parte desta figura é proporcional a sua área. Este fato sugere então uma experiência curiosa. Recortamos em papel cartão um triângulo isósceles de base a e altura b (por exemplo, com $a = 6$ cm e $b = 12$ cm). O baricentro está localizado sobre a mediana que liga o vértice superior ao ponto médio da base, a uma distância de $2b/3$ do vértice superior. Podemos então cortar este triângulo por uma reta paralela à base passando pelo baricentro, ligando as duas partes apenas pela parte central ao redor do antigo baricentro com um pequeno pedaço de papel cartão. Ou então, podemos retirar duas faixas estreitas paralelas à base de cada lado do baricentro, deixando apenas uma pequena região ao redor do baricentro, Figura 4.8.

Tentamos então equilibrar esta figura com um suporte. O que se observa é que apenas quando o suporte é colocado sob o baricentro o corpo fica em equilíbrio na horizontal. Ou seja, embora a área e o peso do trapézio sejam maiores do que a área e o peso do pequeno triângulo que vai do vértice superior à reta passando pelo baricentro, sendo que cada uma destas duas partes tenderia a cair em direção à Terra se não estivessem ligadas rigidamente, o conjunto permanece em equilíbrio. Concluímos então que o centro de gravidade não é, necessariamente, o ponto que divide o corpo em duas áreas iguais ou em dois pesos iguais. Discutiremos este aspecto com uma profundidade bem maior em outras partes deste livro.

Experiência 4.5

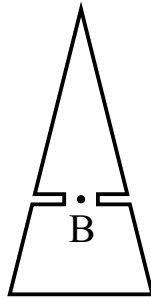



Figura 4.8: O triângulo horizontal continua equilibrado por uma vareta vertical colocada sob seu baricentro quando retiramos duas faixas paralelas à base, embora a área do triângulo menor seja menor do que a área do trapézio.

Existe outra maneira de fazer esta experiência sem cortar o triângulo. Pega-se o triângulo original de papel cartão de base a e altura b, e ele é equilibrado na horizontal ao apoiá-lo sobre a borda de uma régua que está em um plano vertical, com a borda paralela à base do triângulo, passando pelo seu baricentro, Figura 4.9. O plano vertical passando pela régua divide o triângulo em duas áreas diferentes e, portanto, em dois pesos diferentes. Apesar disso, o triângulo permanece em equilíbrio apoiado pela régua, embora tenha liberdade para girar ao redor da borda da régua.

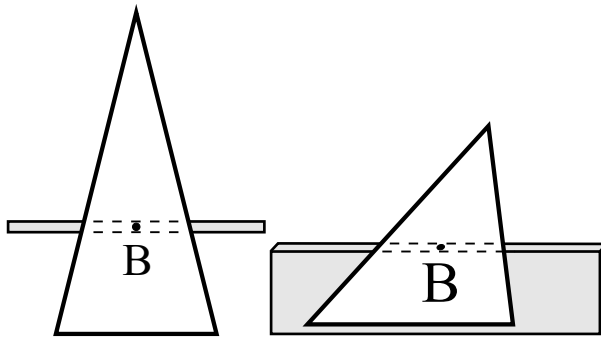



Figura 4.9: O triângulo horizontal fica equilibrado sobre uma reta vertical colocada sob seu baricentro.

4.2 Experiências com Figuras Côncavas ou com Buracos

Recortamos agora no papel cartão algumas figuras côncavas como a letra C, uma Lua em quarto crescente, um boomerang etc. Também devem ser recortadas

algumas figuras com buracos como uma arruela de papel cartão (também pode ser facilmente adquirida uma arruela metálica). Para facilitar o corte do círculo interno da arruela feita de papel cartão, pode-se fazer um corte radial entre o círculo externo e o círculo interno. Mas se utilizarmos uma tesoura pontuda este último procedimento é desnecessário. Os diâmetros externos de todas estas figuras podem ser de 8 cm ou de 10 cm, por exemplo, com os diâmetros internos da ordem de 4 cm ou de 6 cm. Mas estes tamanhos não são tão relevantes. Para as experiências seguintes é bom que sejam recortadas no papel cartão pelo menos duas figuras iguais de cada modelo (duas letras C do mesmo formato e tamanho, duas Luas, duas arruelas etc.). Um conjunto destas figuras será utilizado na Experiência 4.6, enquanto que o outro conjunto composto de figuras iguais será utilizado nas experiências posteriores, quando serão prendidas linhas sobre estas figuras com o auxílio de fitas adesivas.

Experiência 4.6

Tenta-se agora equilibrar estas figuras (colocadas com seus planos na horizontal) colocando-as sobre o suporte, como foi feito com o retângulo ou com o triângulo. Observa-se que não conseguimos equilibrar nenhuma delas. Ou seja, elas sempre caem, não importando o ponto sob o qual colocamos o suporte. Isto está exemplificado na Figura 4.10a no caso da arruela. Ela também cai ao ser solta em um plano horizontal com o palito vertical do suporte ao longo do seu eixo de simetria, ou seja, passando ao longo da parte oca da arruela e de seu centro geométrico.

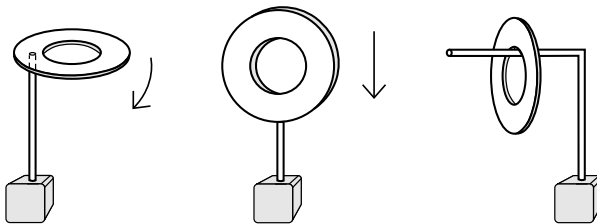



Figura 4.10: (a) A arruela cai quando tentamos suportá-la horizontalmente, ou (b) verticalmente pela borda inferior. (c) Mas podemos mantê-la verticalmente em equilíbrio apoiando-a por uma vareta horizontal que a suporta pelo diâmetro menor da arruela.

Mesmo se tentarmos equilibrar estas figuras sobre uma borda, deixando-as em um plano vertical, não temos sucesso, elas continuam caindo do suporte. Isto está ilustrado na Figura 4.10b no caso de uma arruela. Ou seja, a arruela vai tombar para um lado ou para outro, já que é muito fina e não fica parada em um plano vertical apoiada apenas pela borda inferior.

A única maneira de conseguir deixá-las equilibradas a uma certa altura do solo é mantendo o palito na horizontal, apoiando as figuras em um plano vertical, com o palito atravessando um buraco nos corpos, ou apoiando alguma

parte côncava das figuras. Na Figura 4.10c ilustramos como a arruela pode ser equilibrada em um plano vertical por um palito horizontal.

Diante desta experiência a primeira possibilidade é afirmar que existem alguns corpos ocos ou com buracos que não possuem um centro específico de gravidade, mas sim toda uma linha de gravidade. No caso da arruela, por exemplo, ela fica apoiada em qualquer ponto de sua circunferência interior, mas não fica apoiada quando o palito é colocado exatamente no centro vazio (que é o centro geométrico da arruela). Se formos seguir a definição $CG2$ rigorosamente, deveríamos dizer que a arruela possui uma linha de gravidade, sua circunferência interior, mas que não possui um centro de gravidade.

O mesmo pode ser dito em relação à definição $CG3$. Afinal de contas, o palito na Figura 4.10c está mantendo ou suportando todo o peso da arruela quando a apóia por algum ponto da circunferência interna. Mas o palito não consegue suportar a arruela quando a ponta do palito está sobre o centro vazio da arruela, estando a arruela na horizontal ou na vertical, sem que nenhuma parte do palito toque em qualquer parte material da arruela. Vemos então que se formos seguir a definição $CG3$ rigorosamente, deveríamos dizer que a arruela possui uma linha de peso ou de gravidade (ou seja, sua circunferência interna), mas não um centro de gravidade.

A outra possibilidade é afirmar que nem sempre o centro de gravidade está "no corpo," ou seja, nem sempre ele está localizado em alguma parte material do corpo. Nestes casos o centro de gravidade poderia estar localizado no espaço vazio em algum ponto que guarda uma certa relação espacial com o corpo (como o centro geométrico da arruela, por exemplo), mesmo sem estar ligado fisicamente ao corpo.

Se seguirmos esta última possibilidade teremos de alterar nossa definição $CG2$ de centro de gravidade e também teremos de encontrar alguma outra maneira de encontrar experimentalmente o centro de gravidade nestes casos especiais. Um procedimento para isto é apresentado na próxima experiência.

Experiência 4.7

Prendemos com pequenas fitas adesivas duas linhas de costura na arruela, esticadas, como se fossem dois diâmetros cruzando-se no centro. Neste caso conseguimos equilibrar a arruela quando o suporte é colocado sob o cruzamento das linhas, como na Figura 4.11. Também no caso da Lua ou da letra C é possível encontrar, por tentativa e erro, um ponto tal que quando duas linhas esticadas, presas por fitas adesivas, se cruzam neste ponto, o corpo fica equilibrado na horizontal com o suporte colocado sob o cruzamento das linhas.

Se seguirmos a segunda possibilidade, temos de generalizar nossa definição $CG2$ de centro de gravidade para incluir estes casos especiais. Uma definição mais geral é apresentada a seguir.

Definição Provisória $CG4$**:** Chamamos de centro de gravidade ao ponto no corpo ou fora dele tal que se o corpo for apoiado por este ponto e solto do repouso, vai permanecer em equilíbrio em relação à Terra. Nos casos em

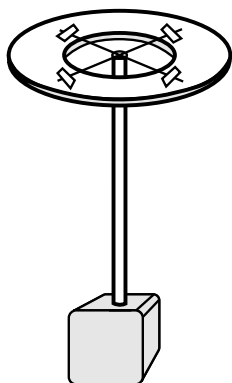



Figura 4.11: A arruela pode ser equilibrada por seu centro utilizando duas linhas de costura esticadas.

que este ponto está localizado fora do corpo, é necessário que seja estabelecida alguma ligação material entre este ponto e o corpo, para que o corpo permaneça em equilíbrio ao ser solto do repouso apoiado sob este ponto.

Esta definição não deixa de ser problemática já que quando fazemos esta ligação material rígida (como as linhas presas com fitas adesivas) estamos alterando o corpo original. Mas desde que o peso desta ligação material seja pequeno comparado com o peso do corpo, é razoável adotar este procedimento. No caso anterior, por exemplo, poderíamos ter o peso conjunto das duas linhas e dos quatro pedaços de fita adesiva sendo muito menor do que o peso da arruela de papel cartão ou de metal.

Mesmo assim ainda surge um outro problema com esta definição, como veremos nas próximas experiências.

Experiência 4.8

Colocamos agora duas linhas bambas, de mesmo comprimento, presas à arruela por fitas adesivas. O comprimento das linhas deve ser maior do que o diâmetro externo da arruela. Elas estão presas do mesmo jeito e nos mesmos locais que na experiência anterior. Ou seja, a reta ligando as duas fitas adesivas que prendem cada linha passa pelo centro geométrico da arruela. A única diferença é o comprimento das linhas, que são bem maiores nesta experiência. Neste caso também conseguimos equilibrar o conjunto com o suporte, só que agora o ponto de encontro entre o cruzamento das linhas e a parte superior do suporte está ao longo do eixo de simetria da arruela e não mais no seu centro geométrico, Figura 4.12.

Caso sigamos a segunda possibilidade descrita anteriormente (ou seja, de que o CG não precisa estar no corpo, podendo localizar-se no espaço vazio), temos de concluir que a arruela não possui apenas um centro de gravidade, mas um conjunto infinito deles localizados ao longo do seu eixo de simetria. Ou seja,

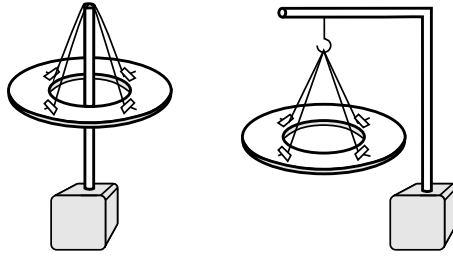



Figura 4.12: A arruela também pode ser equilibrada por um ponto ao longo do seu eixo de simetria utilizando linhas compridas.

todo o eixo de simetria da arruela poderia ser chamado de seu "eixo ou linha de gravidade." E isto tanto de acordo com a definição $CG3$ quanto de acordo com a definição $CG4$.

Experiência 4.9

A definição $CG3$ também apresenta problemas com corpos côncavos, ocos ou com buracos. De acordo com esta definição o centro de gravidade é o ponto de aplicação da força gravitacional, ou seja, o ponto neste corpo onde atua toda a gravidade. A gravidade sempre atua na matéria, está ligada a uma interação entre os corpos materiais e a Terra. Sabemos que o CG de uma arruela é seu centro geométrico (isto será visto em mais detalhes a seguir). Seria difícil dizer que o ponto de aplicação da força gravitacional no caso de uma arruela estaria atuando no vazio onde está seu centro. O peso não pode estar atuando no vazio, sendo esta uma dificuldade conceitual com esta definição.

Uma maneira de ilustrar isto aparece na Figura 4.13. Neste caso a arruela está apoiada por cima. Podemos passar um palito por seu centro que nenhuma força será exercida sobre o palito. Isto é, não haverá força sobre ele ao chegar ao centro da arruela, nem ao passar pelo centro. Em vez do palito pode-se também passar uma mola fina pelo centro da arruela que nenhuma força será exercida sobre a mola. Isto é, ela não será comprimida nem esticada ao passar pelo centro da arruela apoiada por cima. Fica então difícil defender a idéia de que todo o peso da arruela está atuando em seu centro geométrico.

Um outro problema com a definição $CG3$ aparece na próxima experiência.

Experiência 4.10

Como veremos adiante, o centro de gravidade de uma arruela é seu centro geométrico. Agora deixamos cair a arruela em um plano horizontal, sendo que colocamos abaixo do ponto de partida da arruela um palito vertical alinhado com o eixo de simetria da arruela. Mesmo quando o plano da arruela passa pela extremidade superior do palito vem que nenhuma força é exercida sobre o palito. Isto é, mesmo quando o CG da arruela passa pelo palito vem que ele não é pressionado nem sofre nenhuma compressão, Figura 4.14. O mesmo vai

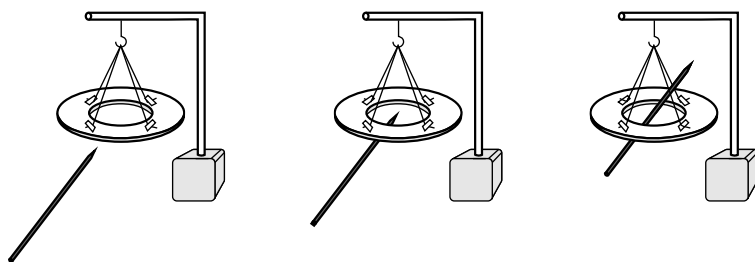



Figura 4.13: Um palito não sofre força alguma ao passar pelo centro de uma arruela apoiada por cima.

ocorrer com uma mola vertical colocada em repouso no lugar do palito vertical. Isto é, a mola não vai ser comprimida quando a arruela passa por ela.

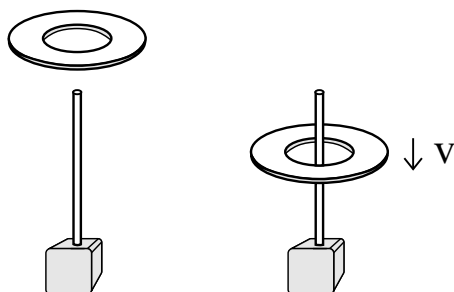



Figura 4.14: Um palito não é comprimido quando o centro da arruela passa pela extremidade superior do palito.

Por outro lado, vamos agora supor que temos 3 palitos verticais cujas projeções verticais vão coincidir com a parte material da arruela, como na Figura 4.15. Ao soltarmos a arruela em um plano horizontal acima dos palitos vem que eles vão ser pressionados quando a arruela é freada por eles, continuando pressionados enquanto a arruela estiver parada sobre eles. O mesmo vai ocorrer com um sistema de 3 molas verticais no lugar dos 3 palitos verticais. Isto é, as molas vão ser comprimidas quando a arruela horizontal em queda livre tocar nelas e for sendo freada pelas molas. E elas vão continuar comprimidas enquanto a arruela estiver parada em repouso sobre elas.

Uma das interpretações destas experiências é que não há de fato nenhum peso efetivo atuando no centro vazio de uma arruela em queda livre, embora este centro vazio seja seu centro de gravidade, como veremos adiante. Isto de certa forma contraria a definição $CG3$. O peso só estaria atuando efetivamente na parte material da arruela.

Por estes motivos a definição $CG3$ deveria ser alterada. Por exemplo, para algo como:

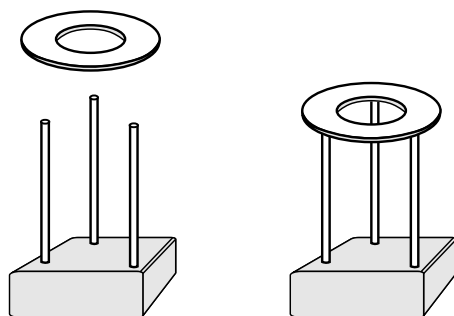



Figura 4.15: Os 3 palitos são comprimidos quando a arruela em queda é freada por eles, continuando a ser pressionados enquanto ela permanecer em repouso sobre eles.

Definição Provisória $CG5$**:** O centro de gravidade é um ponto no corpo ou fora dele que se comporta como se toda a força gravitacional estivesse atuando neste ponto. Nos casos em que este ponto está localizado fora do corpo, é necessário que seja estabelecida alguma ligação material entre este ponto e o corpo para que se perceba ou se meça toda a força gravitacional atuando neste ponto.

Esta é uma definição bem razoável. A dificuldade maior está na localização deste ponto a partir desta definição. Vamos analisar, por exemplo, o caso da arruela com linhas compridas, Figura 4.12. Ela é suportada pelas quatro fitas adesivas. Já estas fitas adesivas são suportadas pelas duas linhas esticadas que, por sua vez, são apoiadas no cruzamento entre elas pelo palito de churrasco ou pelo gancho acima do cruzamento das linhas. Ou seja, é como se todo o peso da arruela estivesse sendo suportado, indiretamente, por pontos localizados ao longo do eixo de simetria da arruela (isto é, no cruzamento das duas linhas esticadas), mas não necessariamente no centro da arruela, desde que se utilizem linhas presas ao corpo. Neste caso deveria ser falado em linha de gravidade ou linha do peso, em vez de centro de gravidade ou centro do peso.

Dificuldades análogas com a definição $CG5$ ocorrem nas Experiências 4.9 e 4.10.

Nas próximas experiências veremos um outro problema que surge mesmo com as definições mais gerais do centro de gravidade representadas por $CG4$ e por $CG5$.

4.3 Experiências com Corpos Volumétricos

Até o momento temos feito experiências com figuras "planas." Na verdade todo corpo material é tridimensional. Quando afirmamos que a figura é plana, o que queremos dizer é que sua espessura é muito menor do que as outras dimensões envolvidas no problema (a espessura d do retângulo de papel cartão, por

exemplo, é muito menor do que os comprimentos a e b de seus lados). Vamos agora realizar experiências com corpos cujas três dimensões espaciais possuem tamanhos da mesma ordem de grandeza.

Os corpos que vamos utilizar são um cubo ou dado de faces planas, uma esfera, uma porca metálica e um ovo. Quando os corpos são leves usaremos a massa de modelar e o palito de churrasco como suporte. No caso do ovo (ou de esferas pesadas) pode-se usar a própria mesa como suporte já que o corpo sempre vai ficar apoiado apenas por uma pequena região devido à sua forma convexa em todos os pontos.

Experiência 4.11

Apóiam-se estes corpos sobre um suporte e observam-se em quais pontos eles ficam em equilíbrio. No caso do cubo de faces planas encontram-se seis pontos de equilíbrio, a saber, os centros das seis faces, Figura 4.16.

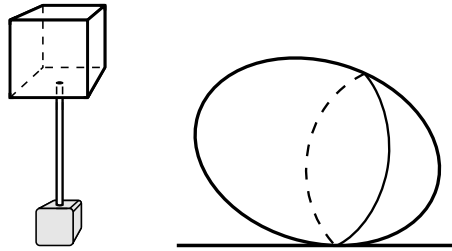



Figura 4.16: Um cubo pode ser apoiado pelos centros de suas 6 faces, enquanto que um ovo pode ser apoiado sobre uma mesa por qualquer ponto da circunferência representada nesta Figura.

Também no caso da porca metálica encontram-se seis pontos de equilíbrio, os centros dos seis lados exteriores. Além disso, utilizando o procedimento das linhas de costura que se cruzam (método empregado no caso da arruela), mostra-se que todos os pontos ao longo do eixo de simetria da porca também são pontos de equilíbrio. Ela também fica equilibrada em qualquer ponto ao longo da circunferência interna, ou da superfície cilíndrica interna, se o palito de churrasco estiver na horizontal.

Já a esfera fica equilibrada em todos os pontos de sua superfície. A esfera possui, portanto, um número infinito de pontos de equilíbrio.

O caso mais interessante é o do ovo, que possui toda uma linha de equilíbrio. Esta linha é uma circunferência sobre a casca, sendo que o plano desta circunferência é perpendicular ao eixo de simetria do ovo, Figura 4.16.

Desta experiência conclui-se que muitos corpos geométricos possuem mais de um centro de gravidade, tanto se seguirmos a definição $CG2$ quanto as definições $CG3$, $CG4$ ou $CG5$. O cubo, por exemplo, possuiria seis destes centros, o ovo toda uma linha e a esfera toda sua superfície. A porca oca possuiria seis destes centros, mais sua circunferência interna, além de todos os pontos de seu eixo de simetria. Para sermos coerentes com esta descoberta, deveríamos falar de

pontos, linhas ou superfícies de gravidade, em vez de falarmos de um "centro" de gravidade para cada corpo.

4.4 Fio de Prumo, Vertical e Horizontal

Felizmente existe um outro procedimento experimental ligado à gravidade que nos permite encontrar um único ponto específico ligado ao equilíbrio de cada corpo rígido. A partir deste segundo procedimento experimental pode-se chegar a uma outra definição do centro de gravidade que evita os problemas anteriores e que ainda mantém um significado físico importante. Como este procedimento utiliza um fio de prumo, apresentamos inicialmente este instrumento e os conceitos de pontos de apoio e de suspensão.

Antes algumas definições.

- **Fio de Prumo:** Qualquer fio ou linha dependurados pela extremidade superior, que fica fixa em relação à Terra, e que possui um corpo preso na extremidade inferior. O fio de prumo tem de ser livre para oscilar ao redor da extremidade superior, Figura 4.17.

- **Ponto de apoio, representado em algumas Figuras pelas letras PA:** Ponto sobre o qual o corpo se apóia, como a extremidade superior do palito de churrasco utilizado nos suportes das experiências descritas anteriormente.

- **Ponto de suspensão ou de sustentação, representado em algumas Figuras pelas letras PS:** Ponto por onde o corpo é suspenso ou dependurado, como veremos nas próximas experiências (muitas vezes coincidirá com a posição do alfinete que sustentará o corpo e o fio de prumo).

A parte superior do fio de prumo pode ser segurada pelos dedos, pode ser amarrada a uma barra ou a um gancho etc. Nas nossas experiências vamos prendê-la ao suporte. Espetamos um alfinete na parte superior do palito de churrasco usado como suporte nas experiências iniciais. Poderíamos então simplesmente amarrar no alfinete uma linha de costura com um peso na ponta. Mas como vamos ter de colocar e tirar o fio de prumo diversas vezes do alfinete, o ideal é fazer um pequeno laço na parte superior da linha. Na parte inferior amarramos um chumbo de pesca ou um pedaço de massa de modelar. O instrumento a ser usado nas experiências é indicado na Figura 4.17.

Uma das vantagens desta montagem é que ela ainda permite que se repitam as experiências anteriores em que apoiamos figuras planas na parte superior do palito de churrasco. Para que o alfinete não atrapalhe a repetição das experiências iniciais, ele não deve ficar bem no topo do palito de churrasco, mas um pouco abaixo de sua extremidade superior. Além disso, para que as figuras de papel cartão não fiquem escorregando do alfinete, é recomendável que ele fique um pouco inclinado, com sua cabeça um pouco mais alta do que sua ponta espetada no palito.

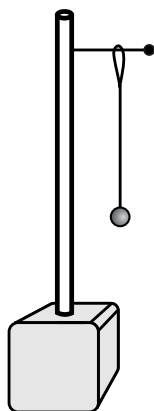



Figura 4.17: Fio de prumo.

Caso se deseje realizar separadamente experiências apenas com o fio de prumo, pode-se também simplesmente amarrar o fio de prumo a um palito de churrasco na horizontal. Neste caso evita-se a utilização do alfinete, que pode ser perigoso no caso de se realizar estas experiências com crianças. O palito de churrasco fica na horizontal apoiado sobre uma mesa, com metade dele sobre a mesa e a outra metade para fora dela. A parte que fica sobre a mesa é apoiada por cima com um livro ou com outro corpo. O fio de prumo fica dependurado na parte do palito que está para fora da mesa, livre para oscilar, como na Figura 4.18. A figura geométrica é então apoiada pelo próprio palito de churrasco, quando o palito atravessa um furo feito na figura, em vez de ser apoiada pelo alfinete.

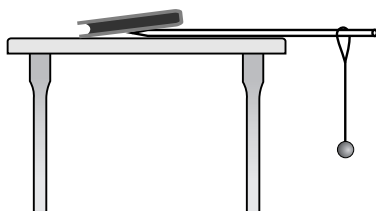



Figura 4.18: Fio de prumo.

Uma outra possibilidade muito prática é usar como suporte uma linha ou barbante preso na parte superior a uma barra ou cabo de vassoura fixado na horizontal, [Gas03, pág. 138]. Na parte inferior da linha coloca-se um anzol ou gancho no qual será dependurada a figura plana (passando o gancho pelo furo feito na figura de papel cartão) e o fio de prumo, Figura 4.19.

Experiência 4.12

Pendura-se o fio de prumo no suporte pelo seu laço superior e espera-se que

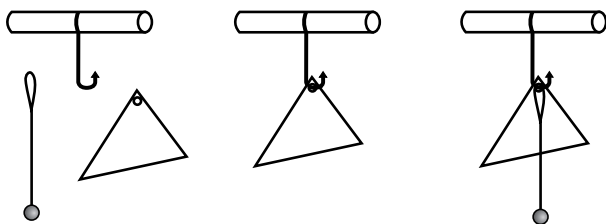



Figura 4.19: Fio de prumo.

ele atinja o repouso em relação à Terra. Depois deixa-se cair ao solo a partir do repouso um pequeno corpo como uma moeda, solta próxima ao fio de prumo. Com isto pode-se observar que a direção de queda do corpo é paralela à direção indicada pelo fio de prumo, Figura 4.20.

Esta é então a principal utilidade do fio de prumo. Ou seja, quando ele está parado em relação à Terra ele indica a direção vertical. Neste sentido ele é melhor do que um corpo em queda livre para indicar a direção vertical, pois o fio de prumo é uma reta visível e permanentemente estável (exceto quando há correntes de vento etc.). Os pedreiros utilizam bastante um fio de prumo (um pequeno peso amarrado a um barbante) para saber se uma parede sendo levantada está ou não na vertical. Para isto colocam o fio de prumo ao lado da parede e verificam se o plano da parede é ou não paralelo ao fio de prumo.

Para encontrar a direção horizontal utilizam-se três métodos principais. É comum ver os pedreiros, por exemplo, empregarem qualquer uma das três maneiras descritas a seguir.

A) Inicialmente obtém-se a vertical, V, com o auxílio de um fio de prumo. Depois coloca-se um esquadro grande encostado e paralelo ao fio de prumo. A direção ortogonal ao fio indicada pelo esquadro é então, por definição, a direção horizontal, H, Figura 4.20.

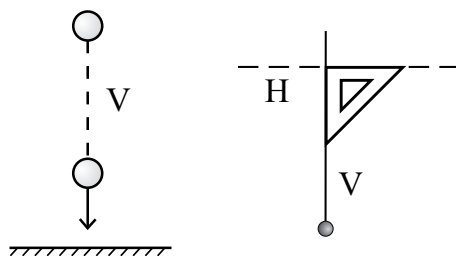



Figura 4.20: Encontrando a vertical (V) e a horizontal (H) com a queda de um corpo e com o fio de prumo.

B) Utiliza-se um nível de bolhas. Usualmente ele é constituído na forma de um paralelepípedo com um pequeno recipiente cilíndrico transparente cheio de líquido e com uma bolha. Há duas marcações ao longo do eixo do cilindro, colocadas simetricamente em relação ao centro. Coloca-se o nível de bolhas

sobre uma superfície. Quando a bolha fica no meio da marcação que existe no recipiente com líquido, a superfície está na horizontal, Figura 4.21.

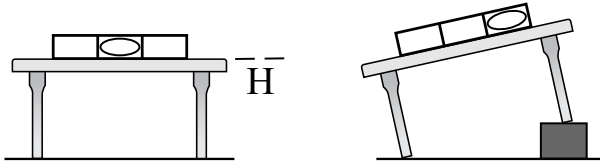



Figura 4.21: Encontrando a horizontal com um nível de bolha.

Quando a bolha fica em uma das extremidades do recipiente, a superfície não está na horizontal, sendo que o lado onde se localiza a extremidade da bolha está mais levantado em relação à Terra do que a extremidade oposta do nível, como na Figura 4.21. O funcionamento do nível de bolhas é baseado na ação da gravidade e no princípio do empuxo devido a Arquimedes, [Ass96].

C) Utiliza-se uma grande mangueira transparente aberta nas duas extremidades e preenchida parcialmente com um líquido como água. Mantém-se a mangueira parada em relação à Terra e aguarda-se que o líquido também atinja o repouso. A reta unindo as duas superfícies livres do líquido indica a direção horizontal, como na Figura 4.22. O funcionamento desta mangueira é baseado no equilíbrio de líquidos sob a ação da gravidade.

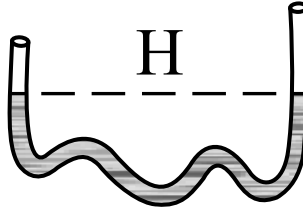



Figura 4.22: Encontrando a horizontal com uma mangueira transparente aberta nas duas extremidades.

Apenas como curiosidade vale mencionar aqui a maneira como os pedreiros constroem paredes ortogonais ou, como afirmam, paredes que estejam no esquadro. Depois de construída uma parede, marcam sobre ela dois pontos separados horizontalmente de quatro metros, A e B. O primeiro ponto, A, está na extremidade da parede a partir da qual se quer construir a outra parede. Feito isto tentam encontrar um terceiro ponto C tal que a distância entre A e C seja de 3 m e a distância entre B e C seja de 5 m. Quando encontram este ponto, a reta ligando AC é então ortogonal à reta AB, como na Figura 4.23. Em vez de utilizarem estas distâncias específicas, podem usar qualquer múltiplo delas (como 30 cm, 40 cm e 50 cm). Por trás deste método está o teorema de Pitágoras. Ou seja, em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. E um triângulo de lados 3 m, 4 m e 5 m satisfaz a este

teorema, assim como qualquer triângulo cujos lados sejam proporcionais a estes valores.

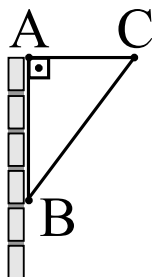



Figura 4.23: Maneira prática de traçar retas ortogonais.

4.5 Segundo Procedimento Experimental para se Encontrar o Centro de Gravidade

O primeiro método para encontrar o centro de gravidade foi descrito nas experiências anteriores. Isto é, equilibra-se círculos, paralelogramos e triângulos horizontalmente em cima de um palito de churrasco na vertical. Esta é a maneira mais simples e intuitiva de entender o que é o centro de gravidade. Com este procedimento também se pode perceber que ele é um ponto único no corpo. A experiência mostra que estes corpos só permanecem em equilíbrio na horizontal quando apoiados por um único ponto chamado de CG. Mas haviam problemas conceituais com este enfoque, como vimos anteriormente. Voltamos agora a estas figuras planas e realizamos outro conjunto de experiências.

Apresentamos agora o segundo método para encontrar o centro de gravidade que evita os problemas apresentados anteriormente. Vamos usar figuras planas iguais às anteriores, de mesmo formato e tamanho. Vamos fazer em cada figura dois ou três furos circulares. As figuras podem ser perfuradas com pregos ou com furadores de papel. Os diâmetros dos furos devem ser pequenos comparados com as dimensões das figuras para que não alterem muito os pesos nem as distribuições de matéria das figuras, mas grandes o suficiente para que possamos dependurar com folga estas figuras no alfinete ou no gancho onde também será dependurado o fio de prumo. Ou seja, não deve haver muito atrito entre o alfinete e as figuras. A figura deve poder girar livremente ao redor do alfinete e neste sentido o furo não pode ser muito apertado, devendo ser maior do que o diâmetro do alfinete. Furadores de papel funcionam muito bem para fazer os furos circulares em figuras de papel cartão com dimensões maiores do que 5 cm. Estes furos permitem um movimento livre tanto quando se passa um alfinete por eles, quanto no caso em que são atravessados por um palito de churrasco. Outra vantagem dos furadores de papel é que os furos saem bem circulares, evitando imperfeições e diminuindo o atrito com o suporte. Existem alguns furadores

de papel com um único furo que são extremamente úteis e práticos, como o apresentado na Figura 4.24.

Figura 4.24: Furador de papel com um único furo.

Experiência 4.13

Pega-se um círculo de papel cartão igual ao utilizado nas experiências anteriores e faz-se um pequeno furo circular em uma posição qualquer do círculo que não coincida com seu centro. Dependura-se este círculo no alfinete que está fincado no suporte, com o alfinete passando pelo furo. Ou seja, com o alfinete na horizontal, o plano do círculo ficará na vertical. Coloca-se o fio de prumo no alfinete e espera-se que ele atinja o equilíbrio. Solta-se o círculo a partir do repouso e espera-se que ele atinja o equilíbrio. Observa-se que ele não fica parado em todas as posições em que é solto, a não ser que seja liberado em uma posição preferencial na qual o centro X está verticalmente abaixo do alfinete, Figura 4.25a.

Caso seja solto do repouso com o centro fora da vertical passando pelo alfinete, observa-se que o centro vai oscilar ao redor desta vertical até parar devido ao atrito, Figura 4.25b.

Quando o círculo pára de oscilar, observa-se que seu centro X fica verticalmente abaixo do alfinete.

Em vez de pendurar o círculo no alfinete, pode-se também amarrar o círculo com uma linha passando pelo furo. A parte superior da linha é então presa a um suporte fixo que fica acima do círculo. Também neste caso observam-se os mesmos fenômenos que no caso anterior, desde que o círculo tenha a liberdade de girar em qualquer sentido ao redor do ponto onde está amarrado.

Podemos agora apresentar o segundo procedimento experimental para se encontrar o centro de gravidade

Dependura-se o círculo pelo furo, soltando-o do repouso. Depois que o círculo oscilou e atingiu o repouso, dependura-se no mesmo alfinete o fio de prumo junto ao círculo e novamente espera-se que o sistema atinja o equilíbrio. Traça-se então com um lápis sobre o círculo a reta vertical que coincide com a direção indicada pelo fio de prumo. Vamos chamá-la de PS_1E_1 onde PS_1 é o ponto de

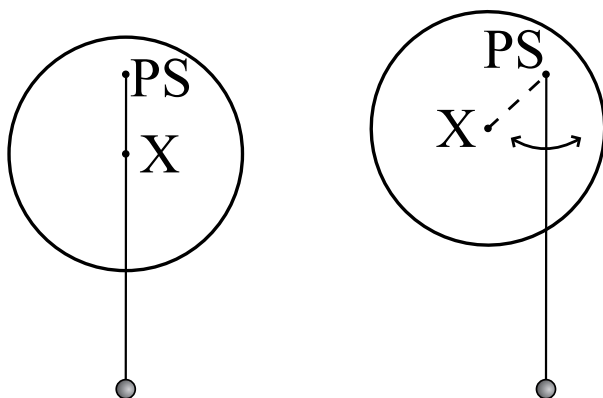



Figura 4.25: O círculo permanece em repouso após ser solto do repouso dependurado pelo ponto de suspensão PS apenas na posição preferencial na qual o centro X está verticalmente abaixo do PS. Caso seja solto com seu centro fora da vertical passando pelo PS, o centro vai oscilar ao redor desta vertical.

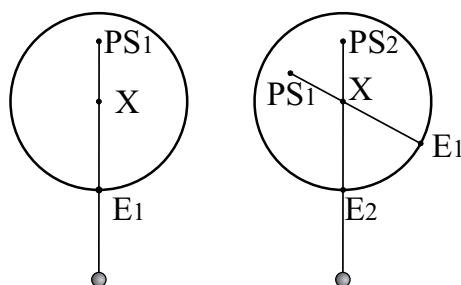



Figura 4.26: Segundo procedimento experimental para achar o CG de um círculo.

suspensão indicado pelo alfinete e E_1 é a extremidade inferior do corpo ao longo desta vertical, Figura 4.26.

Retira-se o fio de prumo e o círculo do alfinete e faz-se agora um segundo furo no círculo. Este segundo furo deve estar fora da reta PS_1E_1. Vamos chamá-lo de PS_2. Dependura-se o círculo no alfinete passando por PS_2, coloca-se no alfinete o fio de prumo junto ao círculo, espera-se o sistema entrar em equilíbrio, e traça-se uma nova reta sobre o círculo coincidindo com a direção indicada agora pelo fio de prumo. Vamos chamá-la de PS_2E_2, onde E_2 é a extremidade inferior do círculo ao longo desta nova vertical, Figura 4.26b.

Observa-se que as duas retas PS_1E_1 e PS_2E_2 cruzam-se em um ponto que coincide com o centro do círculo. Caso seja feito um terceiro furo que não esteja ao longo destas duas retas e o procedimento for repetido, vai se verificar que também a terceira vertical PS_3E_3 vai passar pelo centro do círculo. Na prática é bom que sejam de fato traçadas três ou mais retas pois isto permite que

se encontre o ponto de cruzamento com maior precisão. E este procedimento também vai mostrar que todas as retas se cruzam em um único ponto.

Nem sempre a coincidência é perfeita. Uma parte pequena dessa imperfeição é devida ao fato de que os dois ou três furos feitos no círculo alteram um pouco seu peso e sua distribuição de matéria. Outro motivo mais relevante é o atrito que surge entre o círculo e o fio de prumo enquanto o sistema está oscilando, antes de atingir o repouso. Às vezes este atrito impede que o fio de prumo fique exatamente na vertical quando se atinge o repouso, pois o fio de prumo pode agarrar em alguma irregularidade da figura. Mas o motivo principal da imperfeição está na dificuldade de se traçar sobre a figura as linhas paralelas à vertical. Temos de prender a linha com os dedos para poder traçar estas retas e neste momento podemos alterar um pouco a direção real indicada pelo fio de prumo.

Mas com um pouco de prática e paciência consegue-se melhorar este processo. E com isto pode-se afirmar com segurança que o cruzamento das verticais obtidas assim coincide com o centro do círculo.

Experiência 4.14

Repete-se o procedimento da experiência anterior com um retângulo e com um paralelogramo, fazendo-se dois ou três furos em cada figura. Traçam-se as verticais e observa-se que coincidem com os centros geométricos das figuras, Figura 4.27.

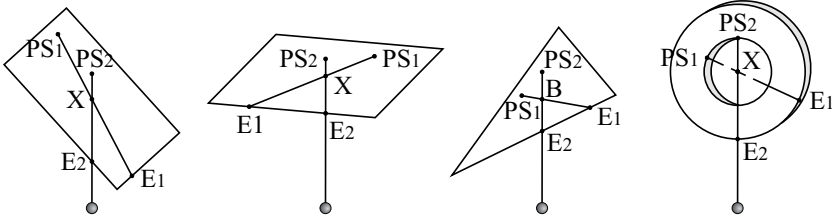



Figura 4.27: Segundo procedimento experimental para achar o CG de um retângulo, de um paralelogramo, de um triângulo e de uma arruela.

Fazendo o mesmo com um triângulo qualquer se obtém que o cruzamento das verticais coincide com o baricentro do triângulo, Figura 4.27.

Experiência 4.15

Também pode-se obter o CG de uma arruela feita de papel cartão utilizando este procedimento, Figura 4.27d. Observa-se que o cruzamento das verticais coincide com o centro da arruela.

No caso da arruela de papel cartão pode-se repetir o procedimento de fazer dois ou três furos e dependurá-la pelo alfinete. Ou então se aproveita que a arruela já é naturalmente oca e pode ser dependurada apoiando a arruela pelo alfinete encostado em algum ponto do diâmetro interno. As verticais são

traçadas agora sobre a arruela de papel cartão. Novamente, observa-se que os prolongamentos de duas ou três verticais que partem de pontos diferentes da arruela cruzam-se no centro da arruela. Como a figura é oca, os prolongamentos das verticais têm de ser determinados geometricamente. O importante é que se observa que este ponto coincide com o centro de gravidade que havia sido obtido pelas linhas esticadas na Exp. 4.7.

No caso da arruela com as linhas compridas, Exp. 4.8, a vertical que passava pelo cruzamento das linhas no equilíbrio coincidia com a direção do palito de churrasco (ou do fio de prumo) e também com a direção do eixo de simetria da arruela. E este eixo de simetria também passa pelo centro geométrico da arruela.

Experiência 4.16

Repete-se o procedimento com o fio de prumo no caso do papel cartão na forma de Lua em quarto crescente, ou na forma da letra C. Ou seja, neste caso as figuras de papel cartão ficam equilibradas em um plano vertical.

Novamente observa-se que o cruzamento das verticais nestes casos coincide com o resultado da Exp. 4.7 feita com estas figuras equilibradas em um plano horizontal. Na Exp. 4.7 eram utilizadas linhas esticadas horizontais apoiadas por um suporte vertical colocado sob o cruzamento das linhas horizontais esticadas.

Experiência 4.17

Recorta-se agora no papel cartão uma figura plana de forma arbitrária que não tenha qualquer simetria. São feitos dois ou três furos nesta figura. Depois se localiza seu centro de gravidade procurando-se o ponto sob o qual tem de ser colocada a parte superior do palito de churrasco na vertical tal que a figura permaneça em equilíbrio na horizontal ao ser solta do repouso. Marca-se este ponto.

Utiliza-se agora o segundo procedimento de encontrar o centro de gravidade. Ou seja, dependura-se a figura na vertical por um alfinete horizontal que passa por cada um dos furos da figura, aguarda-se que ela atinja o equilíbrio em cada caso, traçam-se as verticais pelos pontos de suspensão e marca-se o encontro destas verticais. Observa-se que o cruzamento destas verticais coincide com o centro de gravidade obtido anteriormente, embora a figura não possua qualquer simetria.

Podemos resumir estas experiências da seguinte maneira. Suspende-se um corpo rígido por um ponto de suspensão PS_1, tal que o corpo seja livre para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto. Para cada ponto PS vai existir uma posição preferencial tal que o corpo vai permanecer em equilíbrio ao ser solto do repouso. Caso ele não seja solto nesta posição preferencial, ao ser solto do repouso o corpo vai executar um movimento oscilatório ao redor da vertical passando por PS, até parar devido ao atrito. Depois que o corpo atingiu o equilíbrio, traça-se uma vertical passando por PS_1. Escolhe-se então

um segundo ponto PS_2 que não esteja ao longo da primeira vertical e repete-se o procedimento. Vem da experiência que estas duas verticais obtidas desta maneira se encontram em um ponto. O mesmo vai ocorrer quando o corpo é suspenso por qualquer outro ponto PS. Ou seja, todas as verticais que passam pelos pontos de sustentação quando o corpo está em equilíbrio se cruzam em um único ponto.

Estes fatos permitem uma definição bem geral apresentada a seguir.

Definição Prática $CG6$: Centro de gravidade de um corpo é o ponto de encontro de todas as verticais passando pelos pontos de suspensão do corpo quando ele está em equilíbrio e tem liberdade para girar ao redor destes pontos.

O procedimento detalhado para se encontrar o centro de gravidade traçando as verticais passando por cada ponto de suspensão já foi apresentado anteriormente. Ele está ilustrado na Figura 4.28 para um corpo de forma arbitrária.

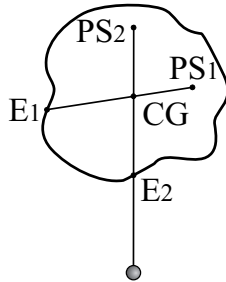



Figura 4.28: Segundo procedimento experimental para achar o CG de uma figura de forma arbitrária.

Vem da experiência que o centro de gravidade é único para cada corpo. Além disso, ele não precisa coincidir com nenhum ponto material do corpo, como vimos no caso de figuras côncavas ou com buracos. É importante enfatizar nesta definição que o corpo tem de ter liberdade para girar ao redor do ponto de suspensão. Podemos manter uma régua homogênea em equilíbrio com seu lado mais comprido na horizontal, por exemplo, segurando-a por uma de suas extremidades, desde que a prendamos com força nesta extremidade, impedindo-a de girar. Neste caso não podemos traçar a vertical pelo ponto de suspensão já que ela não está livre para girar. Caso lhe seja dada liberdade para girar, ela não vai permanecer nesta posição ao ser solta do repouso, mas vai girar até ficar com seu eixo maior na vertical. Outro aspecto relevante a enfatizar é que as verticais que vão ser utilizadas para encontrar o CG só devem ser traçadas depois que o corpo estiver em equilíbrio, ou seja, com todas as suas partes paradas em relação à Terra. Não se deve traçar nenhuma vertical enquanto ele estiver oscilando ao redor da posição de equilíbrio. Tudo isto está explícito na definição anterior, mas quisemos chamar atenção para estes pontos.

Esta última definição do centro de gravidade é bem mais abstrata do que a

definição $CG2$. A definição $CG2$ é mais intuitiva e indica de maneira clara a existência de um ponto único e específico em cada corpo tal que ele pode ficar em equilíbrio sob a ação da gravidade quando apoiado por este ponto. Mas a definição $CG2$ apresenta problemas ao lidar com corpos ocos ou volumétricos, como vimos anteriormente. A definição $CG6$ é mais geral e se aplica a todos os casos encontrados até agora.

No caso de corpos volumétricos é necessário suspender o corpo por um fio ligado a um dos pontos externos do corpo, PS_1. Esperamos até que o corpo atinja o equilíbrio. Depois temos de imaginar a vertical passando por PS_1 sendo estendida para baixo até atingir a extremidade E_1 do corpo. Então suspendemos o corpo pelo fio ligado a um outro ponto externo do corpo, PS_2. Esperamos até que o corpo atinja o equilíbrio e imaginamos a vertical que passa por PS_2 sendo estendida para baixo até atingir um outro ponto externo E_2 do corpo. A intersecção destas duas verticais é o CG do corpo. Este procedimento está ilustrado na Figura 4.29 no caso de um cubo.

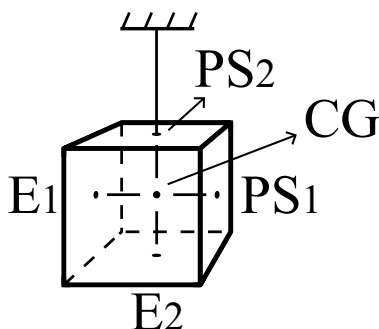



Figura 4.29: Segundo procedimento experimental para achar o CG de um cubo.

Agora que já temos uma definição clara e geral do centro de gravidade, podemos clarificar os conceitos relacionados ao apoio ou à suspensão de um corpo apresentando duas definições.

- **Ponto de apoio:** Dizemos que um corpo em equilíbrio está apoiado por um ponto (ou por uma pequena superfície ou região) quando este ponto de apoio está abaixo do centro de gravidade do corpo. Este ponto de apoio será representado pelas letras PA.

- **Ponto de suspensão:** Dizemos que um corpo em equilíbrio está suspenso por um ponto (ou por uma pequena superfície ou região) quando este ponto de suspensão está acima do centro de gravidade do corpo. Este ponto de suspensão ou de sustentação será representado pelas letras PS.

Após estas definições podemos prosseguir com as experiências.

4.6 Terceiro Procedimento Experimental para se Encontrar o Centro de Gravidade

Vamos analisar agora as experiências já realizadas de equilíbrio com corpos volumétricos. O cubo ou dado liso ficou equilibrado quando o palito de churrasco era colocado sob o centro de cada um de seus lados. Prolongando-se estas seis verticais para cima a partir dos pontos de apoio PA (os centros de cada face), observa-se que elas vão se cruzar no centro de simetria do cubo. O mesmo acontece com as verticais prolongadas para cima passando pelos centros das seis faces externas da porca metálica. Ou seja, elas se cruzam no centro de simetria da porca. A esfera fica apoiada em equilíbrio por qualquer ponto quando colocada em repouso sobre uma mesa plana. Os prolongamentos verticais para cima de todas as retas que passam pelos pontos de apoio se cruzam no centro da esfera. No caso do ovo, ele conseguia ficar em equilíbrio ao ser solto do repouso quando apoiado por qualquer ponto de sua casca que estava ao longo de uma circunferência situada em um plano perpendicular ao eixo do ovo. Apoiando o ovo por dois ou por três pontos distintos ao longo desta circunferência e prolongando verticalmente para cima as retas que passam por estes pontos verifica-se que elas vão se cruzar em um ponto único no interior do ovo.

Inicialmente apoiamos o corpo por um ponto de apoio PA_1. Imaginamos a vertical passando por PA_1 ser prolongada para cima até E_1, onde E_1 é a extremidade superior do corpo ao longo desta vertical. Depois apoiamos o corpo por um outro ponto de apoio PA_2. Prolongamos a vertical passando por PA_2 até E_2, onde E_2 é a extremidade superior do corpo ao longo desta segunda vertical. A intersecção das duas verticais é o CG do corpo, como mostrado na Figura 4.30.

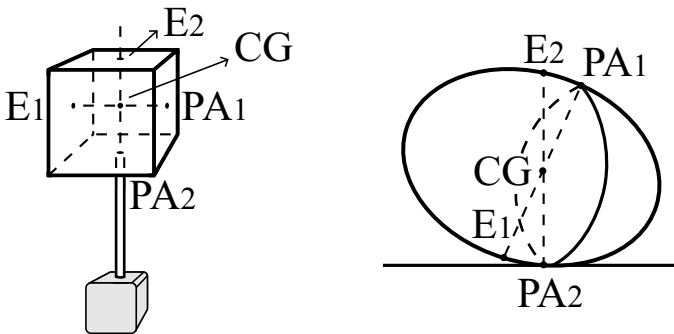



Figura 4.30: Terceiro procedimento experimental para achar o CG de um cubo e de um ovo.

Ou seja, é possível encontrar o CG de um corpo não apenas achando o encontro das verticais traçadas para baixo a partir dos pontos de suspensão, mas também achando o encontro das verticais traçadas para cima a partir dos pontos de apoio. Isto sugere uma nova maneira prática de se encontrar o CG

de qualquer corpo:

Definição Prática $CG7$: Centro de gravidade de um corpo é o ponto de encontro de todas as verticais passando pelos pontos de apoio do corpo quando ele está em equilíbrio e tem liberdade para girar ao redor destes pontos.

O centro de gravidade obtido pela maneira prática $CG6$ sempre coincide com o obtido pela maneira prática $CG7$. Isto pode ser visto, por exemplo, dependurando qualquer um destes corpos volumétricos por linhas presas a um suporte. A linha pode ser amarrada aos corpos, se tiverem buracos, ou presa a eles com um pedaço de chicletes ou de massa de modelar.

Vamos supor que amarramos a extremidade superior da linha a um suporte e grudamos sua extremidade inferior com massa de modelar a uma esfera. Soltamos o sistema e aguardamos que ele atinja o equilíbrio. Neste caso o ponto de suspensão (onde a massa de modelar toca a esfera) vai ficar verticalmente acima do centro da esfera. O mesmo ocorre nos outros casos.

4.7 Condições de Equilíbrio de Corpos Apoiados

Vamos agora concluir esta parte inicial realizando mais algumas experiências muito simples mas extremamente importantes. Vamos trabalhar com corpos cujos centros de gravidade já estejam localizados. Algumas destas experiências (ou partes delas) já foram realizadas anteriormente. Mas agora vamos rever as principais experiências que estabelecem as condições de equilíbrio e de movimento de corpos apoiados por baixo.

Experiência 4.18

Vamos trabalhar aqui com um triângulo, mas a experiência pode ser reproduzida com qualquer figura plana cujo centro de gravidade pertence ao corpo. Marcamos com uma caneta de forma precisa o centro de gravidade (baricentro) de um triângulo. Depois tentamos equilibrá-lo na horizontal apoiando-o em diversos suportes e soltando-o do repouso. Inicialmente usamos uma garrafa pet na vertical, com tampa. Sempre que o centro de gravidade está sobre a tampa ocorre equilíbrio. Caso a vertical passando pelo centro de gravidade do triângulo não passe sobre a tampa, o triângulo cai com o centro de gravidade aproximando-se da Terra. Depois se utiliza um lápis na vertical com a ponta para baixo dentro de um apontador. Observamos novamente que podemos equilibrar o triângulo sempre que o centro de gravidade está sobre uma parte qualquer da extremidade superior plana do lápis. Usamos então um palito de churrasco na vertical com a ponta para baixo. Novamente é possível equilibrar o triângulo nas mesmas condições anteriores, mas agora não há muita liberdade para isto. Isto é, qualquer pequeno movimento horizontal do centro de gravidade que o afasta da extremidade superior do palito faz com que o triângulo caia. Quando usamos como suporte um palito de churrasco na vertical

com a ponta para cima, fica bem mais difícil equilibrar o triângulo. Qualquer tremida de nossas mãos enquanto soltamos o triângulo é suficiente para desequilibrar o triângulo e fazê-lo cair. O mesmo ocorre com qualquer inclinação ou trepidação do palito de churrasco ocasionada por ventos ou por trepidações no solo. Por último, é extremamente difícil conseguir equilibrar o triângulo sobre a ponta de um alfinete ou de uma agulha, mesmo que tentemos colocar o centro de gravidade exatamente sobre a ponta do alfinete, a não ser que furemos ou deformemos o papel cartão. Muitas pessoas não conseguem equilibrar a figura deste jeito por mais que tentem.

Outros exemplos deste fato encontram-se em uma das experiências anteriores, na qual um cubo e uma porca metálica ficavam em equilíbrio apoiadas sobre a parte superior de um palito de churrasco apenas quando seus centros de gravidade (o centro de simetria do cubo e da porca) ficavam verticalmente acima da superfície superior do palito.

Concluímos então que um corpo só fica apoiado em equilíbrio quando o CG está verticalmente acima da região de apoio. Além disso, é extremamente difícil equilibrar um corpo quando o centro de gravidade está verticalmente acima do suporte nos casos em que a área do suporte tende a zero, aproximando-se de um ponto matemático. Isto fica ainda mais evidente na experiência a seguir.

Experiência 4.19

Pegamos o triângulo da experiência anterior, o furamos e o dependuramos em um alfinete fincado em um suporte vertical. O alfinete horizontal passa pelo furo do triângulo e o plano do triângulo é vertical. Giramos o triângulo tal que seu centro de gravidade e o alfinete estejam ao longo de uma vertical, com o centro de gravidade do triângulo acima do alfinete. Soltamos então o triângulo desta posição a partir do repouso, firmando a base do palito de churrasco. Observa-se que o triângulo não permanece nesta posição. Em vez disso, o centro de gravidade começa a realizar oscilações de grande amplitude ao redor da vertical inferior que parte do alfinete, até que finalmente pára de oscilar, Figura 4.31. Na posição final de equilíbrio temos o alfinete e o centro de gravidade ao longo de uma vertical, com o centro de gravidade do triângulo estando localizado abaixo do alfinete.

Experiência 4.20

Consideramos agora uma esfera homogênea sobre uma mesa horizontal. Podemos soltá-la em repouso em qualquer posição sobre a mesa que ela vai continuar parada. Caso seja dado um pequeno movimento horizontal ao centro da esfera, ela vai continuar girando até parar devido ao atrito.

Experiência 4.21

Uma experiência análoga pode ser feita com qualquer recipiente cilíndrico homogêneo que tenha o centro de gravidade ao longo do seu eixo de simetria (lata de refrigerante ou de óleo, vidro de conserva etc.). Ele permanece em

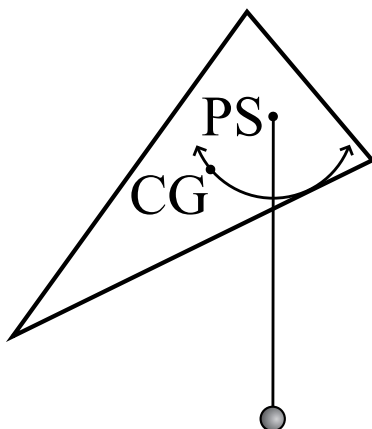



Figura 4.31: Quando o triângulo é solto em um plano vertical com seu CG acima do alfinete ele não permanece em repouso, mas oscila ao redor da vertical passando pelo alfinete, até parar com o CG abaixo do alfinete.

repouso se for colocado parado deitado sobre uma mesa horizontal, a partir de qualquer posição. Se receber um pequeno impulso horizontal tal que comece a girar ao redor da linha de apoio, vai continuar girando até parar devido ao atrito.

Vamos fazer agora uma seqüência de três experiências de certa forma análogas ao que foi feito com o ovo anteriormente, só que agora com uma simetria um pouco diferente que permite analisar com mais clareza o que está ocorrendo. Vamos lidar com um recipiente cilíndrico de xampu cuja seção reta seja elíptica (semi-eixos maior e menor dados por b e por a, respectivamente, com $b > a$). O centro de gravidade está ao longo do eixo de simetria do recipiente, passando pelo centro das duas bases elípticas.

Experiência 4.22

O recipiente de xampu é deitado sobre uma superfície horizontal e solto do repouso. Observa-se que ele permanece em equilíbrio somente ao ser colocado deitado sobre a superfície com a linha de apoio ao longo da extremidade do semi-eixo menor a, ver a Figura 4.32a. Nesta posição o CG está verticalmente acima desta linha de apoio. Por definição esta configuração será chamada de posição preferencial do recipiente.

Experiência 4.23

Se girarmos ligeiramente o recipiente ao redor desta linha e o soltarmos, ele não permanecerá em repouso. Em vez disso, o centro da elipse começará a oscilar ao redor da vertical anterior, como mostrado na Figura 4.32b, até que o recipiente entre em repouso devido ao atrito. A posição final em que ele fica parado é aquela posição preferencial em que o centro da elipse está verticalmente

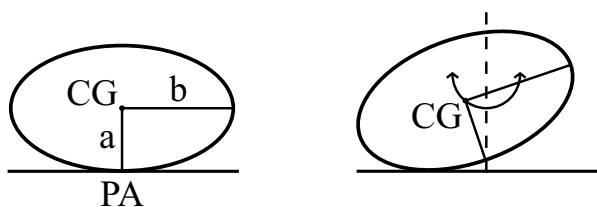



Figura 4.32: O CG oscila ao redor da vertical passando por PA.

acima da linha de apoio passando pela extremidade inferior do semi-eixo menor a. Esta experiência é análoga ao que acontece em uma cadeira de balanço.

Podemos ver pela Figura 4.33 que ao girarmos o recipiente ao redor da linha inferior na posição preferencial, o CG deixa de estar ao longo da vertical que passa pelo novo ponto de apoio ou pela nova linha de apoio. Além disso, o CG sobe em relação à altura que ocupava na posição preferencial. Quando o recipiente é solto do repouso, o sentido inicial do movimento (ou seja, para que lado o recipiente vai girar) é tal que o CG se aproxima da Terra. A posição final atingida pelo recipiente, que coincide com sua posição preferencial, é aquela na qual o CG está no ponto mais baixo possível.

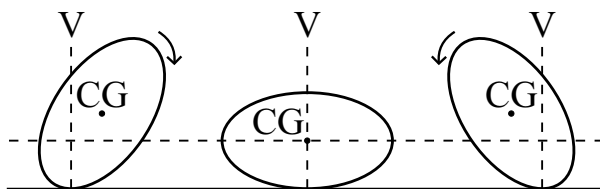



Figura 4.33: Quando um corpo é solto do repouso, sua direção de movimento é tal que o CG desce. A posição central nesta Figura é de equilíbrio estável.

Experiência 4.24

O recipiente é agora solto do repouso a partir da posição em que o CG está verticalmente acima da extremidade inferior do semi-eixo maior b. É praticamente impossível deixá-lo equilibrado nesta posição se o solo for plano e liso. Em vez disso, ele acaba tombando para um lado ou para outro. Para saber de que lado ele tomba, basta soltá-lo do repouso com o CG ligeiramente afastado da vertical anterior. Neste caso o sentido inicial do movimento é sempre tal que o CG se aproxime da Terra, como na Figura 4.34. A posição final de equilíbrio é mais uma vez a posição preferencial com o CG verticalmente acima da extremidade inferior do semi-eixo menor a.

Estas experiências e outras análogas podem ser resumidas da seguinte maneira. Seja um corpo apoiado sobre uma superfície horizontal firme e solto do repouso. Ele permanecerá em equilíbrio somente se o CG estiver verticalmente

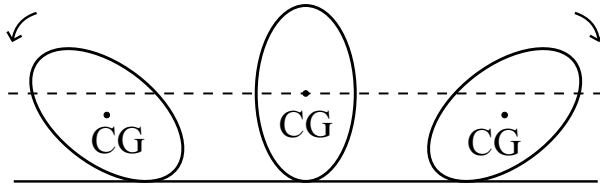



Figura 4.34: A posição central nesta Figura é de equilíbrio instável.

acima desta superfície. Caso o CG esteja verticalmente fora da região limitada pela superfície de contato, o corpo começará a se deslocar ao ser solto do repouso. O movimento inicial do corpo será tal que o CG se aproxime da Terra.

4.7.1 Equilíbrio Estável, Instável e Indiferente

As experiências apresentadas anteriormente também sugerem as seguintes definições:

- **Equilíbrio estável:** Casos em que o centro de gravidade está verticalmente acima da região de apoio e, além disso, quando qualquer perturbação no estado do corpo faz com que o CG suba. Vamos chamar esta configuração de posição preferencial do corpo.

  Observa-se experimentalmente nestes casos que qualquer perturbação fará com que o centro de gravidade oscile ao redor da vertical que passa pela região de apoio na posição preferencial, vibrando até parar devido ao atrito. Por este motivo dá-se o nome de equilíbrio estável a esta configuração.

- **Equilíbrio indiferente:** Casos em que o centro de gravidade está verticalmente acima da região de apoio e, além disso, quando qualquer perturbação no estado do corpo mantém inalterável a altura do CG em relação à Terra.

  Nestes casos observa-se que o corpo fica em equilíbrio em qualquer posição na qual seja solto. Por este motivo este tipo de equilíbrio é chamado de indiferente. Caso o corpo receba um pequeno impulso e comece a se deslocar, continuará deslocando-se neste sentido até parar devido ao atrito.

- **Equilíbrio instável:** Casos em que o centro de gravidade está verticalmente acima da região de apoio e, além disso, quando qualquer perturbação no estado do corpo faz com que o CG desça.

  Observa-se que qualquer perturbação na posição do corpo fará com que o centro de gravidade se afaste da posição inicial, sem voltar a ela. Por este motivo esta situação recebe o nome de equilíbrio instável.

4.7.2 Estabilidade de um Sistema

Existe ainda uma outra propriedade ligada ao equilíbrio de um corpo apoiado por baixo que pode ser derivada a partir destas condições de equilíbrio estável e instável. Esta propriedade também pode ser verificada experimentalmente. Para isto usamos um paralelepípedo retângulo de lados a, b e c. Ele pode ser um tijolo, um bloco homogêneo de madeira, uma caixa de sapatos ou de fósforos etc. Trabalharemos sempre com o plano bc na vertical. Tanto pela simetria do corpo quanto experimentalmente é fácil verificar que o centro de gravidade estará no centro do paralelepípedo. Colocamos agora um fio de prumo no centro da face bc. Se o corpo for um bloco homogêneo de madeira, o mais simples é pregar um prego no centro desta face, amarrando nele uma linha com uma chumbada na ponta. No caso da caixa de sapato pode-se utilizar um palito de churrasco atravessando o centro das duas faces paralelas de lados b e c. Amarra-se então no palito uma linha com um pequeno peso na ponta. No caso da caixa de fósforos pode-se atravessar um alfinete pelo centro das duas faces bc, pendurando nele uma linha de costura com um pequeno peso. Para evitar que o paralelepípedo tombe para frente na direção do fio de prumo, é importante que o peso do fio de prumo seja pequeno comparado ao peso do paralelepípedo. A experiência também não funciona se o paralelepípedo for muito fino, ou seja, com lado a sendo muito menor do que b e c, aproximando-se a uma linha (como ocorre com um retângulo de papel cartão, ou com uma carta de baralho, onde a espessura do papel cartão ou do baralho é muito menor do que os lados do retângulo). Nestes casos fica difícil equilibrar o corpo com a face bc na vertical. Com tudo preparado, partimos para as experiências.

Experiência 4.25

Começamos com o paralelepípedo parado sobre uma mesa horizontal, com o lado c na vertical e o lado b ha horizontal. A face ab está na horizontal, juntamente com seus quatro vértices V_1, V_2, V_3 e V_4, Figura 4.35a.

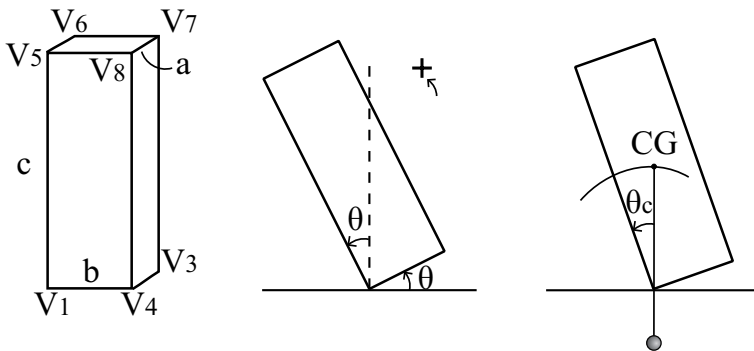



Figura 4.35: (a) Um tijolo; (b) rotação de um ângulo θ; e (c) o ângulo crítico θ_c para o qual o CG está na posição mais alta possível.

Vamos escolher o sentido de rotação anti-horária no plano vertical como indicando um ângulo positivo, Figura 4.35b.

Se girarmos o paralelepípedo ao redor do eixo V_1V_2 de um ângulo θ e o soltarmos do repouso, seu movimento inicial será no sentido de abaixar seu CG, como vimos nas condições de equilíbrio estável e instável anteriormente. É fácil ver que existirá um ângulo crítico θ_c no qual a reta passando pelo eixo V_1V_2 e pelo centro de gravidade estará vertical, coincidindo com a direção do fio de prumo. Nesta situação o CG estará na posição mais alta possível. Caso o paralelepípedo parta do repouso em um ângulo inicial menor do que o ângulo crítico, tenderá a voltar à posição inicial com o lado c na vertical e o lado b na horizontal, já que neste sentido de movimento o CG estará baixando. Caso o ângulo inicial seja maior do que o ângulo crítico, o corpo tenderá a se afastar da posição inicial, caindo para o lado tal que o lado c se aproxime da horizontal enquanto que o lado b tenda à vertical. A posição do ângulo crítico é de equilíbrio instável, Figura 4.35c.

Da Figura 4.36 podemos ver que a tangente do ângulo α entre a base V_1V_4 e a reta ligando o vértice V_1 ao CG é dada por c/b.

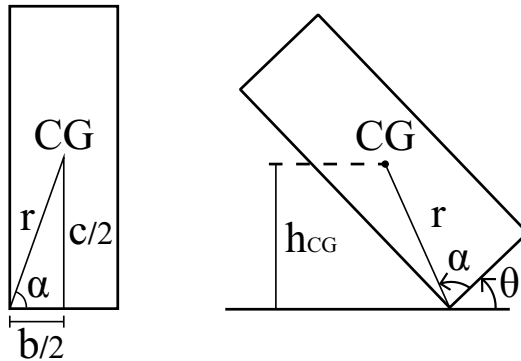



Figura 4.36: Propriedades geométricas de um paralelepípedo.

Das Figuras 4.35 e 4.36 vemos que o ângulo crítico θ_c é dado por $90^o - \alpha$. Isto significa que $\tan\alpha = \tan(90^o - \theta_c) = c/b$.

Da Figura 4.36 vemos que em geral o valor da altura do CG é dado por $h_{CG} = r\,\text{sen}\,(\alpha + \theta)$, onde $r = (c^2 + b^2)^{1/2}/2$. Quando $\theta = 0^o$ temos $h_{CG} = c/2$, quando $\theta = 90^o$ temos $h_{CG} = b/2$. O valor mais alto atingido pelo CG em relação à superfície horizontal da Terra ocorre quando $\alpha + \theta = 90^o$, quando então $h_{CG} = r$.

Quando $c = b$ temos $\alpha = \theta_c = 45^o$. Neste caso os valores mais baixos da altura do CG são dados por $h_{CG} = b/2 = c/2 = 0,5c$. O valor mais alto é dado por $h_{CG} = 2^{1/2}c/2 \approx 0,7c$. Se $c = 4b$ temos $\alpha = 71,6^o$ e $\theta_c = 18,4^o$. Neste caso temos $h_{CG} = c/2 = 0,50c$ quando $\theta = 0^o$, $h_{CG} = 10^{1/2}c/6 \approx 0,53c$ quando $\theta = \theta_c$, e $h_{CG} = c/6 \approx 0,17c$ quando $\theta = 90^o$. No caso em que $c = b/3$ temos $\alpha = 18,4^o$, $\theta_c = 71,6^o$, $h_{CG} = c/2 = 0,50c$ quando $\theta = 0^o$, $h_{CG} = 10^{1/2}c/2 \approx 1,6c$ quando $\theta = \theta_c$ e $h_{CG} = 3c/2 = 1,5c$ quando $\theta = 90^o$.

Destas condições vemos então que quanto mais baixo está o CG de um corpo apoiado por baixo em uma situação de equilíbrio estável, maior será a estabilidade de sua situação. Ou seja, quanto mais baixo estiver seu CG, maior será o ângulo crítico do corpo.

Pode ser feita uma experiência mais controlada do que a anterior ao lidarmos sempre com um corpo de mesmo peso e de mesma forma externa, mas tal que podemos controlar a posição de seu CG. A idéia aqui é usar uma caixa oca homogênea de lados a, b e c, cujo CG esteja no centro da caixa. Vamos supor que o lado bc fique sempre na vertical. Coloca-se então um outro peso dentro da caixa, ocupando uma faixa estreita situada a uma altura h da base, Figura 4.37.

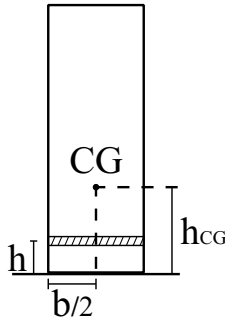



Figura 4.37: Uma caixa com um peso dentro.

O importante é que esta altura possa ser controlada por nós. No caso de uma caixa de fósforos, por exemplo, pode-se prender um conjunto de chumbos de pesca na parte inferior ou superior da caixa. Pode-se verificar que o CG do sistema caixa-chumbo estará localizado em algum ponto entre o centro da caixa e o centro do conjunto de chumbos. Vamos supor que ele esteja a uma altura h_{CG} da base da caixa colocada em uma superfície horizontal, situado ao longo do eixo de simetria da base inferior b da caixa, como na Figura 4.37.

Experiência 4.26

Coloca-se uma base de chumbos internamente a uma caixa de fósforos, apenas sobre o lado inferior. Apóia-se a caixa de fósforos sobre uma superfície horizontal com os chumbos na parte inferior da caixa. Gira-se então o sistema ao redor de um dos eixos da base, soltando-o do repouso. Observa-se que para alguns ângulos o sistema volta à posição inicial ao ser solto do repouso, enquanto que para ângulos maiores que um certo valor crítico a caixa tomba para o outro lado. Isto permite que se determine o ângulo crítico para esta situação, θ_{cI}, o qual separa os dois comportamentos. Inverte-se agora a posição dos chumbos tal que fiquem na parte superior da caixa. Repete-se o procedimento anterior e obtém-se um novo ângulo crítico, θ_{cS}. Observa-se que este novo ângulo crítico é bem menor do que o ângulo crítico anterior, $\theta_{cS} < \theta_{cI}$.

Pela definição anterior temos que tanto com o peso embaixo, quanto com o peso em cima, a caixa de fósforos fica em equilíbrio estável. Isto ocorre devido ao fato de que qualquer pequena perturbação desta posição, seja rotação no sentido horário ou anti-horário, faz com que ela volte à posição original ao ser solta do repouso. Apesar disto, pode-se dizer que a caixa com o peso embaixo possui uma estabilidade maior do que a caixa com o peso em cima. O motivo para isto é que o ângulo crítico no primeiro caso é bem maior do que o ângulo crítico no segundo caso. Isto sugere então a definição de estabilidade de um sistema.

Definição: A medida ou o valor deste ângulo crítico pode então ser considerado como o grau de estabilidade do sistema. Isto é, para dois sistemas em equilíbrio estável, define-se que tem maior estabilidade aquele sistema que possui maior ângulo crítico.

A pergunta agora é saber qual será o ângulo crítico θ_c deste sistema. Quando a caixa gira ao redor do eixo V_1V_2 de um ângulo θ, como na experiência anterior, ela vai voltar para a posição inicial ao ser solta do repouso se $\theta < \theta_c$. Caso $\theta > \theta_c$, a caixa não voltará à posição inicial ao ser solta do repouso, mas tombará para o lado oposto. Seja α o ângulo entre a base horizontal b e a reta ligando o eixo V_1V_2 ao CG. Temos então o resultado dado pela Eq. (4.1), ver a Figura 4.38.

$$\tan\alpha = \frac{h_{CG}}{(b/2)} = \frac{2h_{CG}}{b} \ , \tag{4.1}$$

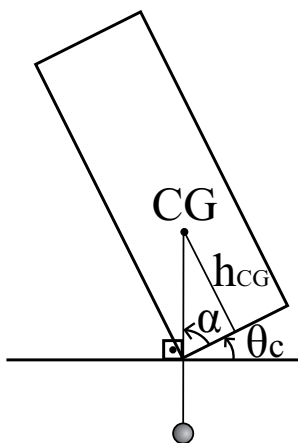



Figura 4.38: Condições de estabilidade para um corpo.

No ângulo crítico temos $\alpha + \theta_c = 90^o$. Logo,

$$\theta_c = 90^o - \alpha = 90^o - \arctan\frac{2h_{CG}}{b} \ . \tag{4.2}$$

Se a altura do centro de gravidade h_{CG} for muito baixa, o ângulo crítico será muito alto, perto de 90°, o que indica uma alta estabilidade para o corpo. Caso h_{CG} seja muito maior do que b, o ângulo crítico será muito baixo, perto de 0°. Qualquer perturbação no sistema fará com que ele caia sem voltar à posição inicial. Desta última fórmula concluímos que para aumentar a estabilidade do sistema é necessário diminuir a razão h_{CG}/b. Há duas possibilidades básicas para isto: (A) diminuindo a altura do centro de gravidade (como vimos no caso da caixa de fósforos com os pesos na parte inferior), e (B) aumentando a base ao redor da qual o sistema está girando.

Existe ainda um outro critério para definir a estabilidade de um sistema que não será considerado neste livro. Consideremos uma lata de refrigerante vazia e outra de mesmo tamanho mas totalmente cheia. O centro de gravidade destes dois sistemas possui a mesma altura em relação ao solo. Como elas possuem a mesma forma e tamanho, isto indica que o ângulo crítico é o mesmo para estas duas latas. Pela definição anterior viria que elas possuem a mesma estabilidade. Por outro lado, é necessário uma energia maior para fazer a lata cheia tombar do que para fazer uma lata vazia tombar, já que esta última é bem mais leve. Perturbações externas (como o chão passar a tremer) tombam mais facilmente uma lata vazia do que uma lata cheia de mesmo formato e tamanho. Neste sentido uma lata completamente cheia é mais estável a perturbações externas do que uma lata vazia, [Wal08, pág. 73]. Estes aspectos dinâmicos não serão considerados aqui.

4.8 Condições de Equilíbrio de Corpos Suspensos

Agora vamos ver as principais condições de equilíbrio e de movimento de corpos suspensos por cima. Isto é, quando o ponto de suspensão PS está acima do CG do corpo. Vamos supor corpos convexos ou que possuam um ou mais furos tal que possam ser suspensos por um alfinete atravessando um furo ou por uma linha amarrada em um furo. Novamente vamos supor que estes corpos já tiveram seus centros de gravidade determinados e que os furos não coincidem com a posição do CG das figuras. Algumas destas experiências, ou parte delas, já foram realizadas anteriormente. Mas elas são apresentadas novamente aqui para que se estabeleçam com clareza as condições de equilíbrio e de movimento dos corpos suspensos. Vamos trabalhar com um triângulo, mas experiências análogas podem ser feitas com qualquer corpo suspenso.

Experiência 4.27

Dependura-se o triângulo com o alfinete do suporte passando por um dos furos. Ele é então solto do repouso. Observa-se que ele só permanece em equilíbrio ao ser solto se o CG estiver verticalmente abaixo do PS. Vamos chamar esta configuração de posição preferencial do corpo suspenso.

Experiência 4.28

Afastamos agora o triângulo para um dos lados, tal que o centro de gravidade e o alfinete não estejam mais ao longo de uma vertical. Soltamos então o triângulo a partir do repouso. Observa-se que o centro de gravidade vai oscilar ao redor da vertical inicial, como mostra a Figura 4.39, diminuindo gradativamente sua amplitude de oscilação até parar. Quando o triângulo pára de oscilar, ele volta à situação inicial com o alfinete e o centro de gravidade ao longo de uma vertical. Além disso, no equilíbrio o centro de gravidade fica verticalmente abaixo do ponto de suspensão.

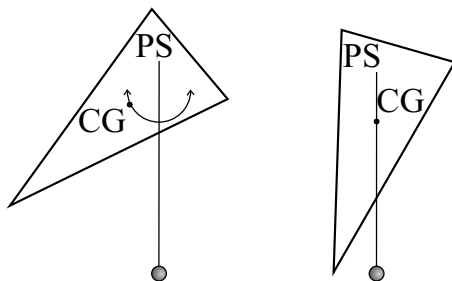



Figura 4.39: Condições de estabilidade para um corpo.

Da Figura 4.39 se percebe que a posição preferencial é aquela na qual o CG (que no caso do triângulo coincide com a posição B do baricentro) está na posição mais baixa possível. Qualquer perturbação desta posição faz com que o CG suba em relação à sua colocação na posição preferencial.

Experiência 4.29

Começamos com uma roda de bicicleta simétrica (isto é, com o centro de gravidade no centro da roda), em repouso, suspensa por um eixo horizontal. A roda é presa ao eixo por uma rolimã, tal que não haja uma folga no eixo. Também pode-se utilizar um papel cartão na forma de um disco e perfurado no centro. Pelo furo passa-se um arame ou um prego com um diâmetro um pouco menor do que o diâmetro do furo, tal que a folga entre os dois seja apenas suficiente para que o disco gire ao redor do eixo. O plano do disco deve ser vertical e a direção do arame ou do prego horizontal. Quando giramos a roda ou o disco lentamente para um lado ao redor do eixo, observa-se que o corpo continua a girar neste sentido até parar devido ao atrito.

Nestes casos a roda e o disco são suspensos pela parte superior do eixo, que está acima do CG dos corpos (localizado no centro da roda ou do disco). Porém, qualquer movimento de rotação da roda ou do disco ao redor do eixo não altera a altura do CG.

4.8.1 Equilíbrio Estável e Indiferente

Estas experiências sugerem as seguintes definições:

- **Equilíbrio estável:** É a posição na qual o CG está verticalmente abaixo do PS e, além disso, quando qualquer perturbação nesta posição faz com que o CG suba. Chama-se de posição preferencial do corpo à configuração em que o CG está verticalmente abaixo do PS.

  Observa-se que caso o corpo seja solto do repouso na posição preferencial, ele vai permanecer em equilíbrio. Caso ele sofra alguma perturbação, vai oscilar ao redor da posição preferencial, diminuindo sua amplitude de oscilação devido ao atrito, até retornar à posição preferencial. Por este motivo esta situação é chamada de equilíbrio estável.

- **Equilíbrio indiferente:** Casos em que o centro de gravidade está verticalmente abaixo do ponto de suspensão e, além disso, quando qualquer perturbação nesta posição não altera a altura do CG em relação à Terra.

  Nestes casos observa-se que o corpo fica em equilíbrio em qualquer posição na qual seja solto. Por este motivo esta situação é chamada de equilíbrio indiferente. Caso o corpo receba um pequeno impulso e comece a girar ao redor do PS, continuará deslocando-se neste sentido até parar devido ao atrito.

Experiência 4.30

Antes de prosseguir vale à pena realizar mais uma experiência. Recorta-se uma figura em papel cartão na forma da letra T. O comprimento da ponta de um braço do T à ponta do outro braço pode ser de 15 cm. A altura do T pode ser de 15 cm ou de 20 cm. A largura dos braços e do corpo do T pode ser de 2 cm. São feitos 11 furos ao longo do eixo de simetria do T. Vamos chamá-los em seqüência de F_1 a F_{11}, com o furo F_1 ficando na junção dos braços e o furo F_{11} na extremidade do corpo do T. Pode-se também fazer um furo na ponta de cada braço, Figura 4.40.

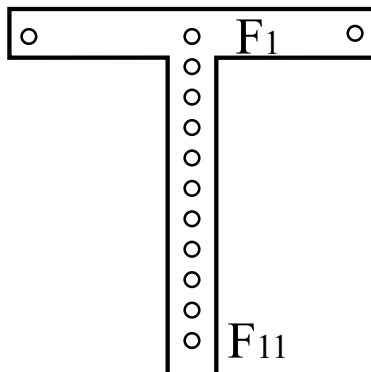



Figura 4.40: Um papel cartão cortado na forma da letra T, com vários furos.

Inicialmente localiza-se o CG do T. Isto pode ser feito, por exemplo, dependurando-o pelos furos nas pontas de cada braço e traçando as verticais res-

pectivas. O CG será o cruzamento destas verticais, que deve estar ao longo do eixo de simetria do T, mais próximo de F_1 do que de F_{10}. Em seguida o T será solto sempre do repouso dependurado por um furo ao longo do seu eixo de simetria, com os braços na horizontal e com seu corpo abaixo do braço (ou seja, com F_1 acima de F_{11}). Quando ele é dependurado por furos que estão acima do CG, como F_1 ou F_2, por exemplo, ele permanece equilibrado na posição em que é solto. Já quando é dependurado por pontos que estão situados abaixo do CG, como F_{10} ou F_{11}, por exemplo, ao ser solto do repouso ele acaba girando para um lado ou para outro, oscila algumas vezes, até parar com os braços na horizontal situados abaixo de F_{11}. Ou seja, o T acaba invertendo sua situação inicial, ficando em repouso na posição final com F_{11} verticalmente acima de F_1. Esta experiência ilustra mais uma vez que é instável a situação de equilíbrio na qual o CG está acima do PS, sendo estável quando ocorre o inverso. Apesar da explicação desta experiência ser baseada em princípios já vistos, ela é bem interessante. Afinal de contas, todos os furos são iguais, permitindo o mesmo movimento de rotação do corpo ao redor do PS. Só que apenas em alguns casos o corpo vai girar ao ser solto do repouso, invertendo a altura dos braços em relação ao corpo do T.

4.9 Caso em que o Centro de Gravidade Coincide com o Ponto de Suspensão

Talvez seja impossível realizar na prática uma experiência em que o corpo esteja suspenso ou apoiado por um ponto que passa exatamente em seu CG, sendo livre para girar ao redor deste ponto. Mesmo quando tentamos nos aproximar desta situação por baixo, o CG sempre vai estar um pouco acima do ponto de apoio PA. Este é o caso, por exemplo, do triângulo na horizontal apoiado sobre um palito de churrasco na vertical colocado abaixo do baricentro do triângulo, Experiência 4.3. Aqui o ponto de contato entre o palito e o papelão fica um pouco abaixo do CG do triângulo, que está localizado em um ponto no centro da espessura do papelão. Também quando tentamos nos aproximar desta situação por cima, o CG sempre vai ficar um pouco abaixo do ponto de suspensão PS. Este é o caso, por exemplo, do triângulo em um plano vertical apoiado por um alfinete horizontal passando por um furo feito ao redor do baricentro do triângulo. O diâmetro do furo tem de ser um pouco maior do que o diâmetro do alfinete, para permitir uma rotação livre ao triângulo. Neste caso o PS será o ponto de contato entre o alfinete e a parte superior do furo, enquanto que o CG estará localizado no centro do furo.

Uma outra dificuldade surge para corpos volumétricos. Por exemplo, se temos um paralelepípedo, só podemos apoiá-lo por uma vareta que toca sua face externa inferior, ou então por um fio preso à superfície externa superior do paralelepípedo. Por outro lado, o CG do paralelepípedo está localizado no centro do paralelepípedo, no interior do tijolo. Para suspendê-lo ou apoiá-lo por este ponto temos de fazer um furo no paralelepípedo. Portanto, teríamos de alterar

sua distribuição de matéria. Mas se a espessura deste buraco é muito pequena comparada com os lados do paralelepípedo, podemos desprezar esta modificação na matéria do paralelepípedo. Mas mesmo depois de feito este buraco fica difícil imaginar um sistema real que permita com que o paralelepípedo tenha liberdade de giro ao redor de seu CG.

Pelo que foi visto nas experiências anteriores, pode-se imaginar o que aconteceria se fosse possível realizar na prática a experiência em que um corpo estivesse dependurado por um ponto de suspensão que passasse exatamente pelo CG do corpo. Já vimos que a tendência do CG de qualquer corpo rígido ao ser solto do repouso é a de se aproximar da Terra. Caso o corpo seja preso exatamente pelo CG, tendo liberdade para girar ao redor deste ponto, qualquer movimento de rotação que ele fizer não vai alterar a altura do CG em relação à Terra. Neste caso o corpo permaneceria em equilíbrio em todas as posições em que fosse colocado e solto do repouso, qualquer que fosse sua orientação em relação à Terra.

Vamos supor inicialmente que temos um triângulo horizontal suspenso exatamente pelo seu centro de gravidade. Vamos chamar de α ao ângulo entre o segmento CGV_1 (que liga o CG ao vértice V_1) e o segmento CGL que indica a direção Leste-Oeste (segmento CGL indo do CG para o Leste, L). Caso ele seja solto em um plano horizontal apoiado por um suporte vertical sob o baricentro, ficará parado qualquer que seja este ângulo α, Figura 4.41.

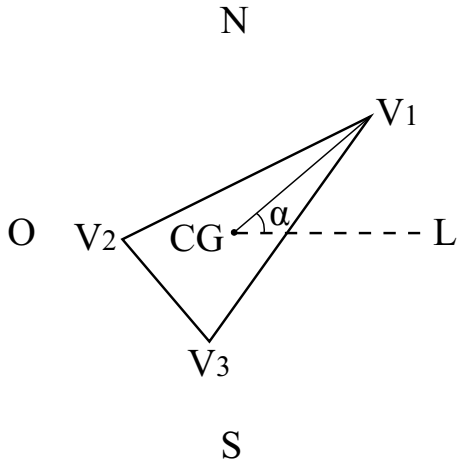



Figura 4.41: O triângulo horizontal apoiado pelo baricentro fica em equilíbrio para todo ângulo α.

Vamos agora supor que o triângulo está em um plano vertical apoiado exatamente pelo baricentro. Seja β o ângulo entre o segmento CGV_1 e a vertical indicada por um fio de prumo. Neste caso ele permanecerá em equilíbrio ao ser solto do repouso qualquer que seja o ângulo β, Figura 4.42.

Vamos supor que agora a normal ao triângulo esteja inclinada de um ângulo

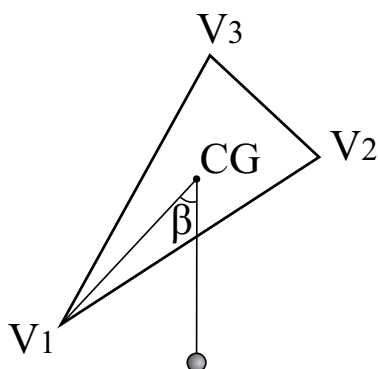



Figura 4.42: O triângulo vertical apoiado pelo baricentro fica em equilíbrio para todo ângulo β.

γ em relação à vertical indicada por um fio de prumo. Caso o triângulo seja solto do repouso nesta posição apoiado exatamente pelo baricentro, ele permanecerá em repouso para todo ângulo γ, Figura 4.43.

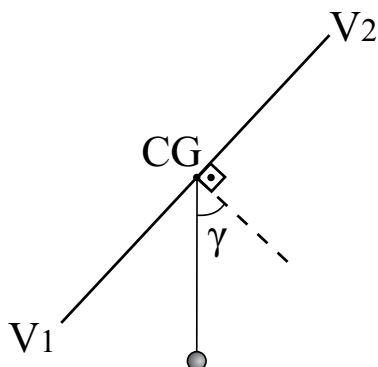



Figura 4.43: O triângulo inclinado apoiado pelo baricentro fica em equilíbrio para todo ângulo γ.

Vimos das experiências anteriores que a tendência do CG é a de se aproximar da Terra quando o corpo é solto do repouso. Logo, se o corpo for preso exatamente pelo CG, sendo solto do repouso e tendo liberdade para girar em qualquer direção ao redor deste ponto, o corpo não vai se mover. Afinal de contas, em qualquer direção que ele começasse a girar seu CG permaneceria na mesma altura. Isto permite uma nova definição do centro de gravidade.

Definição Definitiva $CG8$**:** O centro de gravidade de um corpo rígido é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim

sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra.

Caso este ponto esteja no vazio, como no caso de figuras côncavas ou com buracos, deve-se imaginar uma estrutura rígida ligando o corpo a este ponto, para que o corpo fique suspenso por este ponto.

Veremos depois que Arquimedes parece ter definido o CG desta maneira.

A diferença principal da definição $CG8$ em relação à definição $CG4$ é que agora dizemos que o corpo vai permanecer parado em equilíbrio ao ser solto do repouso, *qualquer que seja a orientação inicial do corpo em relação à Terra.* Vamos considerar uma arruela, por exemplo. Ela pode permanecer em repouso ao ser solta do repouso em um plano vertical, dependurada por algum ponto de sua circunferência interna, como na Figura 4.44a. Neste caso o eixo da arruela faz um ângulo de $\theta = 90^o$ com a linha vertical. Definimos o ângulo θ como sendo o menor ângulo entre o eixo da arruela e a linha vertical.

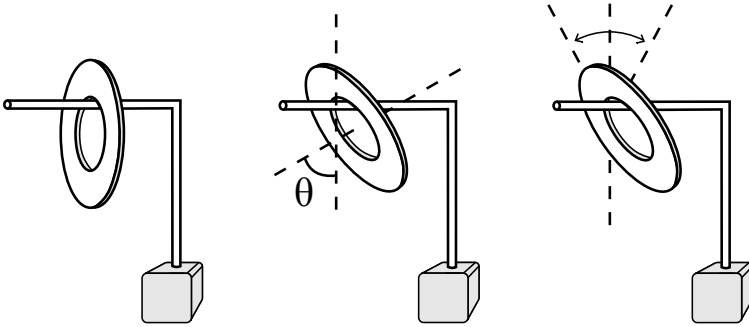



Figura 4.44: Uma arruela pode permanecer em repouso quando apoiada por sua circunferência interna. Contudo, ela não permanece em repouso para todas as orientações em que é solta. Se $\theta \neq 90^o$, seu centro vai oscilar ao redor da vertical passando pelo ponto de suspensão após ser solta do repouso.

De acordo com a definição $CG4$, este ponto PS da circunferência interna por onde ela está sendo apoiada poderia ser considerado um centro de gravidade da arruela. Por outro lado, se o plano da arruela for solto do repouso estando inicialmente inclinado em relação à vertical de um certo ângulo $\theta \neq 90^o$, como na Figura 4.44b, ela não permanecerá em equilíbrio. Após soltar a arruela, seu plano vai oscilar ao redor da vertical passando pelo PS, como na Figura 4.44c. Sua amplitude de oscilação vai diminuindo devido ao atrito, até a arruela parar na posição final $\theta = 90^o$. Esta é a posição preferencial da arruela.

Devido a este fato, não se pode considerar este ponto de suspensão ao longo da circunferência interna como sendo o CG da arruela se utilizarmos a definição $CG8$. Já vimos com o procedimento prático $CG6$ que o CG real da arruela é seu centro de simetria localizado no centro da arruela. Quando a arruela está dependurada por um PS localizado em algum dos pontos ao longo da

circunferência interna, o CG só vai estar em seu ponto mais baixo quando está verticalmente abaixo deste PS, quando então temos $\theta = 90^o$. Esta é uma posição de equilíbrio estável. Quando diminuímos o ângulo θ, o CG sobe. Se a arruela for solta do repouso nesta nova posição, a gravidade vai fazer com que seu CG desça.

Suponha agora que fossem colocados raios sobre a arruela, como os raios de uma roda de bicicleta. Isto pode ser feito com linhas esticadas presas à arruela, ou podemos considerar uma roda de bicicleta real. Vamos supor que a arruela ou roda de bicicleta é suspensa por seu centro e que seja livre para girar em todas as direções ao redor deste ponto. Se ela for solta do repouso com seu eixo fazendo um ângulo θ com a linha vertical, ela permanecerá em equilíbrio para todo ângulo θ, Figura 4.45.

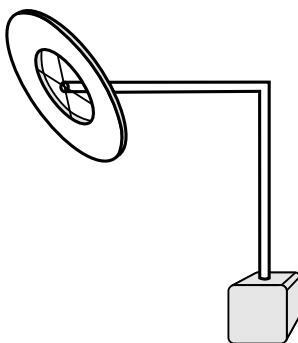



Figura 4.45: Quando um corpo é apoiado exatamente por seu CG ele permanecerá em equilíbrio não importando a orientação em que for solto em relação à Terra.

Pela definição $CG8$, vem então que o centro de simetria da arruela coincide com seu centro de gravidade. A justificativa para ela ficar parada neste caso qualquer que seja o ângulo θ, quando apoiada por seu centro, é que o CG da arruela vai permanecer na mesma altura em relação à superfície da Terra, independentemente do valor deste ângulo. E esta é a característica de um equilíbrio indiferente.

Chamamos esta definição $CG8$ de definitiva. Hoje em dia a palavra "definitiva" deve ser entendida entre aspas. O motivo para isto é que esta definição só é válida em regiões de forças gravitacionais uniformes. As regiões em que isto ocorre são aquelas nas quais um certo corpo de prova sofre sempre a mesma força (em intensidade, direção e sentido) em todos os pontos da região. Isto é o que ocorre para corpos pequenos nas proximidades da superfície da Terra. As forças gravitacionais sobre cada partícula do corpo de prova podem ser consideradas como atuando em retas paralelas entre si, todas verticais.

Mas há situações em que isto não ocorre. Vamos dar um exemplo concreto no qual fazemos várias suposições: (A) O corpo que está exercendo a força gravitacional é como a Terra, mas com o formato de uma maçã, com a maior

distância entre quaisquer duas partículas desta Terra-maçã sendo dada por d_T; (B) o corpo que está sofrendo a força gravitacional é como a Lua, mas com o formato de uma banana, com a maior distância entre quaisquer duas partículas desta Lua-banana sendo dada por d_L; (C) a distância entre uma partícula i qualquer desta Terra e uma partícula j qualquer desta Lua sendo dada por $d_{ij} = d_T + d_L + e_{ij}$, com $0 < e_{ij} << d_T + d_L$. Neste caso não vai existir um centro de gravidade único. Dependendo da orientação relativa entre a Lua-banana e a Terra-maçã, vão existir linhas de equilíbrio distintas. Nestes casos o conceito de centro de gravidade perde seu significado.

De qualquer forma, a definição $CG8$ pode ser utilizada para um corpo de prova de dimensões pequenas comparadas com o raio da Terra.

Embora possa ser impossível realizar uma experiência na qual o corpo rígido esteja apoiado exatamente pelo CG, tendo liberdade para girar em todas as direções ao redor deste ponto, existem experiências que podem ser realizadas ilustrando a definição definitiva $CG8$.

A situação da Figura 4.41 é simulada pela Experiência 4.3. Ou seja, um triângulo fica parado em um plano horizontal ao ser apoiado sobre um palito vertical cuja projeção para cima passa pelo CG do triângulo. A reta ligando um vértice qualquer do triângulo ao seu CG pode fazer um ângulo α qualquer com a direção Leste-Oeste que mesmo assim o triângulo permanecerá em equilíbrio ao ser solto do repouso. Esta situação não é exatamente aquela descrita na definição $CG8$ já que o triângulo possui uma certa espessura, embora seja fino. Isto significa que a parte do papel cartão em contato com o palito de churrasco não é exatamente o CG do triângulo, pois este ponto se localiza no interior da espessura do papel cartão. De qualquer forma esta experiência indica um equilíbrio indiferente, já que o ângulo α pode ser variado sem que com isto se altere a altura do CG do triângulo em relação à superfície da Terra. Isto é, esta experiência ilustra uma situação de equilíbrio indiferente no que diz respeito a este ângulo α.

Nas próximas experiências ilustramos como se pode fazer algo análogo às Figuras 4.42 e 4.43.

Experiência 4.31

Atravessamos um palito ortogonalmente ao plano de um triângulo de papel cartão, tal que o palito fique fixo em relação ao papel cartão. Não há folga entre o palito e o papel cartão, ou seja, o diâmetro do furo é igual ao diâmetro do palito. Isto é feito de tal forma que o palito e o triângulo constituam um único corpo rígido, tal que quando o triângulo gira, o mesmo ocorre com o palito. Isto vai ser indicado nas próximas Figuras pelo semi-círculo preto marcado na seção reta do palito. Vamos supor inicialmente que o furo do palito não coincida com o CG do triângulo.

Apoiamos o palito horizontal por dois suportes verticais, tal que o plano do triângulo seja vertical, Figura 4.46. A posição preferencial é aquela em que o CG do triângulo fica verticalmente abaixo do palito. Vamos supor que o triângulo seja solto do repouso fora da posição preferencial, Figura 4.46a. O

CG do triângulo começa a oscilar ao redor da vertical inferior passando pelo palito, com suas amplitudes de oscilação diminuindo devido ao atrito, até parar na posição preferencial, Figura 4.46b.

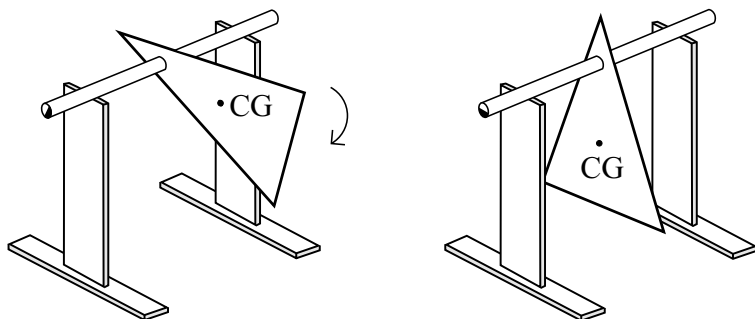



Figura 4.46: (a) Um triângulo é solto do repouso fora da posição preferencial. (b) Ele gira, juntamente com o palito, até parar com o CG verticalmente abaixo do palito.

Por outro lado vamos agora supor que o eixo de simetria do palito passe exatamente pelo CG do triângulo, com o plano do triângulo mais uma vez ortogonal ao palito. O palito vai ficar novamente apoiado na horizontal com o plano do triângulo na vertical. Neste caso o triângulo vai permanecer em repouso qualquer que seja a orientação em que é solto em relação à Terra, Figura 4.47. Esta situação não é exatamente aquela descrita na definição $CG8$, já que o palito é apoiado pela parte de baixo de sua seção reta e não exatamente por seu eixo de simetria (ao longo do qual está o CG do triângulo). Isto significa que o eixo (ou fulcro) de apoio não passa exatamente pelo CG do triângulo. De qualquer forma, neste caso podemos girar o palito juntamente com o triângulo, alterando as partes do palito que estão em contato com os 2 suportes verticais abaixo dele, sem alterar a altura do CG do triângulo em relação à superfície da Terra. Temos então uma situação de equilíbrio indiferente. Esta experiência simula o caso da Figura 4.42.

Experiência 4.32

Vamos agora supor que abrimos uma fenda em um palito de churrasco para poder passar um triângulo de papel cartão pela fenda, Figura 4.48. O palito e o triângulo formam um único corpo rígido. Isto é, quando o triângulo gira, o palito gira junto.

Vamos supor inicialmente que o CG do triângulo esteja fora da fenda, como na Figura 4.49. A configuração preferencial é aquela na qual o CG fica verticalmente abaixo do palito. Vamos supor que o sistema seja solto fora da configuração preferencial, com o palito horizontal apoiado sobre dois suportes horizontais colocados abaixo dele, Figura 4.49a. Neste caso ao ser solto do repouso ele não permanece em equilíbrio, mas gira até parar com o CG abaixo do palito, Figura 4.49b.

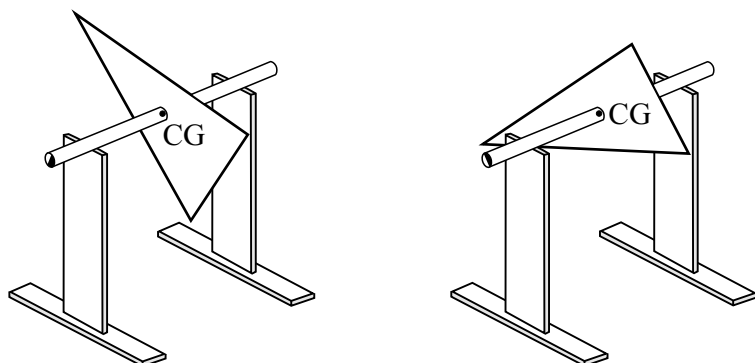



Figura 4.47: Quando o eixo de simetria do palito passa exatamente pelo CG do triângulo vem que o triângulo permanece em repouso qualquer que seja a orientação em que é solto em relação à Terra.

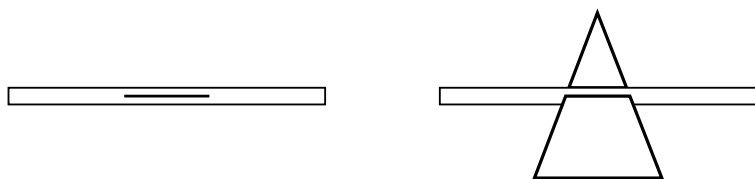



Figura 4.48: Abre-se uma fenda em um palito de churrasco para passar um triângulo de papel cartão pela fenda.

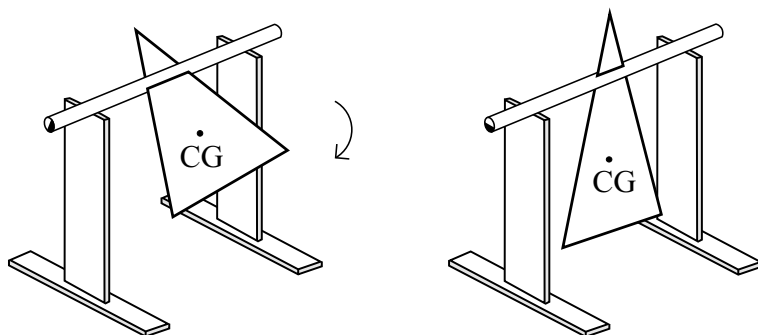



Figura 4.49: (a) Um triângulo é solto do repouso fora da posição preferencial. (b) Ele gira, juntamente com o palito, até parar com o CG verticalmente abaixo do palito.

Vamos agora supor que o eixo de simetria do palito passe exatamente pelo CG do triângulo, Figura 4.50. O sistema é solto do repouso com o palito horizontal apoiado sobre dois suportes verticais. Neste caso o triângulo permanece

em repouso qualquer que seja sua orientação em relação à Terra, Figura 4.50. Novamente esta situação não é exatamente aquela descrita pela definição $CG8$, já que o palito está apoiado pelas partes inferiores de sua seção reta em contato com os dois suportes verticais. Por outro lado o CG do triângulo está exatamente ao longo do eixo de simetria do palito. De qualquer forma, mesmo quando o palito gira sobre estes suportes vem que a altura do CG em relação à superfície da Terra não se altera. Ou seja, temos uma situação de equilíbrio indiferente. Ela simula a situação da Figura 4.43.

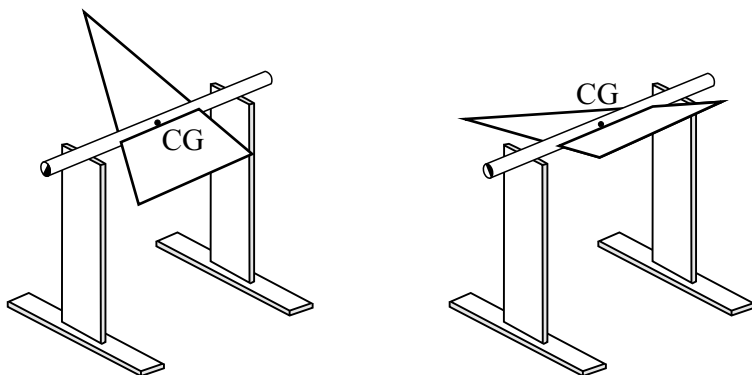



Figura 4.50: Quando o eixo de simetria do palito passa exatamente pelo CG do triângulo vem que o triângulo permanece em repouso qualquer que seja a orientação em que é solto em relação à Terra.

4.10 Resumo

Vamos resumir os aspectos principais que vimos até agora.

- **Definições:** Equilíbrio é quando não há movimento do corpo nem de suas partes em relação à Terra. Vertical é a reta indicada por um pequeno corpo rígido em queda livre a partir do repouso, ou por um fio de prumo em equilíbrio. Horizontal é qualquer reta ou plano ortogonal à vertical. O centro de gravidade de um corpo é um ponto tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra. Ele pode ser encontrado na prática pelo cruzamento das verticais que passam pelos pontos de suspensão do corpo quando ele permanece em equilíbrio ao ser solto do repouso, tendo liberdade para girar ao redor destes pontos.

- **Resultados experimentais:** O centro de gravidade é único para cada corpo rígido. Os corpos livres caem quando soltos do repouso. Qualquer

corpo pode permanecer em equilíbrio ao ser solto do repouso, desde que apoiado por baixo com seu centro de gravidade localizado verticalmente acima da superfície de apoio. Qualquer corpo também pode permanecer em equilíbrio ao ser solto do repouso suspenso por um ponto ao redor do qual tenha liberdade de girar, desde que seu centro de gravidade esteja verticalmente abaixo do ponto de suspensão. Vai ocorrer equilíbrio estável (instável) quando qualquer perturbação da posição de equilíbrio fizer com que o CG do corpo suba (desça) em relação à Terra. O equilíbrio será indiferente se uma perturbação na posição de equilíbrio não alterar a altura do CG em relação à Terra. No caso de equilíbrio estável, qualquer perturbação vai fazer com que o corpo oscile ao redor da posição de equilíbrio, até parar devido ao atrito. No caso de equilíbrio instável qualquer perturbação na posição do corpo vai fazer com que ele se afaste desta posição, deslocando-se inicialmente no sentido em que o CG desça quando comparado com sua colocação na situação de equilíbrio instável.

Até agora não demos nenhuma explicação para estes fatos. Estamos apenas descrevendo observações experimentais e resumindo os aspectos principais. Mas daqui para a frente usaremos estas observações experimentais básicas para explicar outros fenômenos mais complexos que podem ser derivados destas observações.

Capítulo 5

Explorando as Propriedades do Centro de Gravidade

5.1 Atividades Lúdicas com o Equilibrista

Uma das atividades mais interessantes que podem ser feitas em sala de aula ou em um curso de aperfeiçoamento de professores é com um equilibrista de papel cartão. Esta atividade permite que os alunos assimilem e incorporem todos os conceitos que já foram vistos até agora. Ela também é muito divertida, especialmente se for realizada com várias pessoas ao mesmo tempo. A idéia é dar um problema aos alunos e deixar que eles próprios encontrem a solução, sem que o professor vá explicando os fenômenos que vão sendo observados, indicando apenas a seqüência dos procedimentos. Ela deve ser feita depois que os alunos realizaram a maior parte das experiências anteriores.

Material empregado (cada aluno deve construir o seu próprio equipamento e realizar todos os procedimentos descritos a seguir): Suporte com fio de prumo. Equilibrista de papel cartão, ver a Figura 5.1, com as dimensões em centímetros. Massa de modelar extra. Furador de papel.

O suporte com fio de prumo pode ser, por exemplo, um palito de churrasco com a ponta para baixo fincada em massa de modelar, com um alfinete na horizontal fincado na parte superior do palito e com um fio de prumo feito de linha de costura e chumbo de pesca, como usado anteriormente. Nos casos em que o equilibrista fica muito pesado com a massa de modelar, tal que tende a soltar o alfinete do suporte ou a escorregar para fora dele, pode-se utilizar como suporte um palito de churrasco na horizontal sobre a mesa, com o fio de prumo amarrado nele. Neste caso o equilibrista vai ficar suspenso pelo próprio palito de churrasco, em vez de ser suspenso pelo alfinete como no caso anterior.

As dimensões exatas do equilibrista não são tão importantes. O que é mais relevante por hora é que ele seja simétrico e que tenha os braços levantados e as pernas abaixadas, como mostrado na Figura 5.1. É interessante que os braços sejam mais compridos que as pernas já que a maior parte das brincadeiras serão

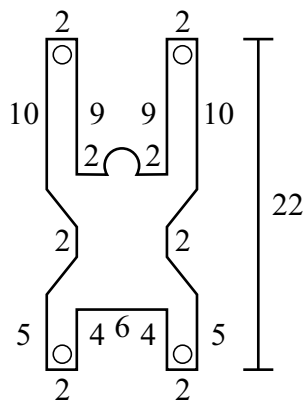



Figura 5.1: Um equilibrista com suas dimensões em centímetros. Existem furos circulares nas mãos e nos pés.

feitas com ele de cabeça para baixo. As dimensões mostradas na Figura 5.1 são apropriadas para a prática que desenvolveremos a seguir, na qual o boneco fica equilibrado na mão dos alunos.

Uma outra propriedade muito importante do equilibrista é que ele deve ser rígido, não-deformável. Se colocarmos uma grande quantidade de massa de modelar, um equilibrista de cartolina pode se deformar. Para evitar que isto aconteça o papelão deve ser bem rígido. Pode-se, por exemplo, construir um equilibrista de plástico rígido que não é tão difícil de obter. Caso o equilibrista seja deformado pela massa de modelar utilizada nestas experiências, pode acontecer de não ser observado o que está descrito a seguir em alguns casos. Por este motivo é importante ter em mente esta precaução.

Inicialmente recortam-se vários equilibristas iguais tal que cada aluno fique com um modelo. Solicita-se que furem as mãos e os pés do equilibrista, como mostrado na Figura 5.1. Solicita-se que determinem o centro de gravidade do equilibrista das duas maneiras que já aprenderam:

(I) Encontrando o ponto em que o boneco fique equilibrado na horizontal apoiado sobre o suporte vertical ao ser solto do repouso, Figura 5.2.

(II) Dependurando-o com um alfinete passando pelos furos nas mãos ou nos pés, traçando depois em cada caso uma vertical com o auxílio do fio de prumo. O centro de gravidade deve ficar marcado no papel cartão, de preferência na frente e no verso, Figura 5.2.

Em seguida começa a atividade mais interessante. Solicita-se que cada aluno tente equilibrar o boneco de cabeça para baixo colocando apenas o dedo indicador esticado, na horizontal, debaixo da cabeça do boneco. Depois de alguns minutos de tentativa ninguém consegue equilibrá-lo. Alguns acham que é devido ao formato curvo da cabeça.

Solicita-se então que eles agora tentem equilibrar o boneco de cabeça para cima com o dedo indicador esticado e na horizontal. Ou seja, como se o boneco

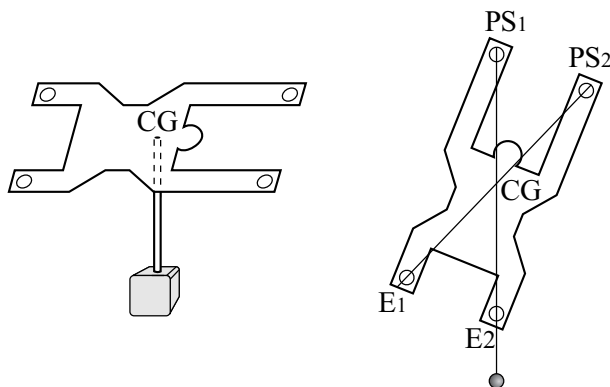



Figura 5.2: Encontrando o CG do equilibrista pelos dois primeiros procedimentos experimentais.

estivesse sentado no dedo. Depois de várias tentativas ninguém consegue, apesar da superfície de contato ser agora retilínea e poder ser colocada na horizontal. Por hora não se deve tentar explicar o motivo dos alunos não conseguirem realizar as tarefas solicitadas. A idéia é apenas prosseguir com as brincadeiras.

Solicita-se então que equilibrem o boneco na horizontal colocando o dedo indicador por baixo dele na vertical. Agora todos conseguem e observam facilmente que o centro de gravidade do equilibrista está acima do dedo.

Feito isto, solicita-se que tentem equilibrar mais uma vez o boneco na horizontal, mas agora colocando o dedo indicador esticado na vertical por baixo da cabeça do boneco. Novamente ninguém consegue.

Vem agora a parte mais estimulante de toda a brincadeira. Distribui-se um pedaço de massa de modelar a cada estudante. Solicita-se novamente que eles tentem equilibrar o boneco de cabeça para baixo colocando o dedo indicador esticado, na horizontal, sob a cabeça do boneco, sem dobrar nem cortar o boneco. Afirma-se que agora eles podem usar a massa de modelar colocando-a sobre o boneco onde quiserem: no centro de gravidade, na mão, na perna ou onde quiserem (exceto na cabeça ou no "cabelo" do boneco, ou seja, na parte inferior da cabeça, para que a massa não grude no dedo indicador). Informa-se também que ela pode ser colocada inteira ou dividida em dois ou mais pedaços. A idéia aqui é deixar os alunos bem livres para experimentar e brincar, sem dar nenhuma receita de bolo indicando a maneira certa de funcionar. Eles começam um pouco tímidos e receosos sobre o que fazer. Mas aos poucos vão se soltando e começando a entrar no jogo. Depois de alguns minutos, um ou dois alunos conseguem equilibrar o boneco e dão largos sorrisos e manifestações verbais de contentamento. Os outros começam o olhar o que os primeiros fizeram e em pouco tempo todos conseguem. O procedimento para o sucesso é colocar uma quantidade suficiente de massa de modelar nas duas mãos até que o boneco fique de cabeça para baixo apoiado no dedo indicador, Figura 5.3.

Quando algum boneco não fica exatamente na vertical, basta que se afaste

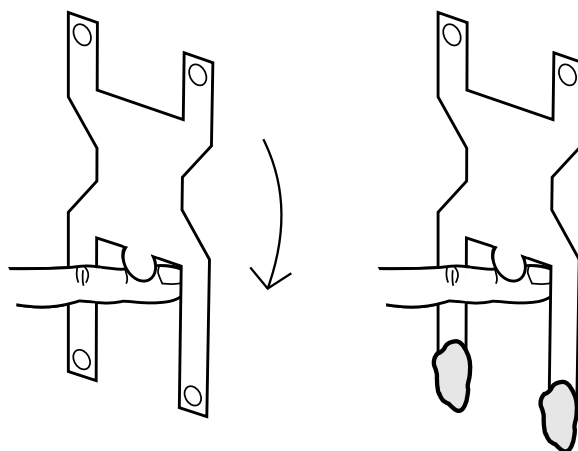



Figura 5.3: Um equilibrista de cabeça para baixo cai ao ser apoiado pela cabeça. Contudo, ao prender uma quantidade suficiente de massa de modelar em suas mãos ele fica equilibrado de cabeça para baixo.

mais as massas da cabeça (colocando-a mais na ponta das mãos, ou até mesmo dependuradas para fora das mãos, como se estivessem pingando das mãos), ou que se aumente a quantidade de massa nas mãos. Desta maneira o boneco acaba ficando bem na vertical.

Após todos os alunos terem conseguido, solicita-se que retirem a massa de modelar e a coloquem em algum outro lugar até que o boneco fique de cabeça para cima, sentado no dedo indicador esticado na horizontal. Um ou outro consegue atingir este objetivo de maneira um pouco mais rápida que no caso anterior. Os outros observam como eles fizeram e aos poucos todos conseguem realizar a tarefa. O procedimento para o sucesso é o de colocar a massa de modelar nos pés do boneco, Figura 5.4a.

Solicita-se então que alterem novamente a colocação da massa de modelar até que o boneco fique equilibrado na horizontal, apoiado com o dedo indicador esticado na vertical, sob a cabeça do boneco. Solicita-se apenas que não coloquem massa na cabeça do boneco, para evitar que ela grude no dedo indicador. Depois de algumas tentativas todos conseguem (alguns alunos precisam ver como outros fizeram para então reproduzir o procedimento). Neste caso o sucesso pode ser alcançado de várias maneiras, não há um procedimento único. Uma técnica comum é a de colocar massas nas duas mãos e nos dois pés do boneco em quantidades apropriadas até que ele fique na horizontal, Figura 5.4b.

Depois desta fase solicita-se que novamente coloquem a massa de modelar em algum lugar até que o boneco fique de cabeça para baixo apoiado sobre o dedo indicador esticado na horizontal e colocado sob a cabeça do boneco. Rapidamente todos colocam uma quantidade suficiente de massa de modelar nas mãos do boneco até que ele fique na posição desejada, como na Figura 5.3. Para mostrar que o equilíbrio nesta nova situação é bem estável, pede-se

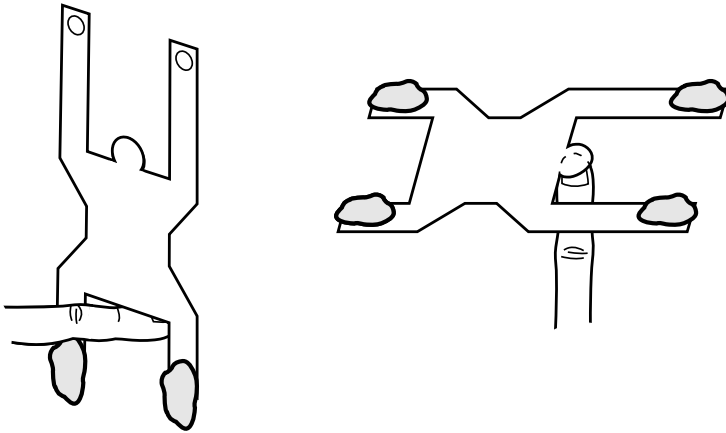



Figura 5.4: Equilibrando o boneco em um plano vertical com a cabeça para cima, ou em um plano horizontal colocando o dedo indicador debaixo de sua cabeça. Nos dois casos o truque é saber onde colocar a massa de modelar e sua quantidade.

que balancem ou soprem lentamente o boneco. Também se pode pedir que o equilibrem sobre a extremidade superior do palito de churrasco, subindo depois todo o conjunto ao levantar a mão que segura o palito. Pode-se até mesmo equilibrar o boneco de cabeça para baixo colocando-o sobre o alfinete fincado no suporte! Mesmo neste caso, pode-se soprar ou empurrar lentamente o boneco que ele oscila ao redor da posição de equilíbrio, voltando depois a ficar parado de cabeça para baixo. Todos ficam muito admirados com isto. Este é um efeito notável e marcante que causa uma profunda impressão em todas as pessoas. A estabilidade alcançada por este boneco é realmente admirável.

Depois disto pergunta-se onde eles acham que se localiza o centro de gravidade nesta nova situação (boneco de cabeça para baixo com massa de modelar nas mãos). Alguns poucos acham que se localiza no mesmo lugar de antes (no meio do peito), mas a maioria acredita que se encontra na cabeça do boneco, mais especificamente no ponto em que a cabeça encontra o dedo indicador. Sem dar a resposta correta, solicita-se então que localizem com precisão o centro de gravidade utilizando o segundo método. Ou seja, dependurando o boneco com massa de modelar nas mãos através do alfinete do suporte. Na primeira tentativa dependura-se o boneco pelo furo de um dos pés e traça-se uma vertical. Depois se dependura o boneco pelo furo do outro pé e traça-se a segunda vertical. Deve-se dizer a eles que esta experiência deve ser bem precisa pois é muito importante que o CG seja bem localizado. Ao traçarem as verticais alguns acreditam que o método "não dá certo," já que as verticais parecem não se cruzar (ou ao menos não se cruzam onde eles esperavam). Pede-se que continuem assim mesmo traçando as verticais. O resultado final, quando feito corretamente, é algo como o mostrado na Figura 5.5a.

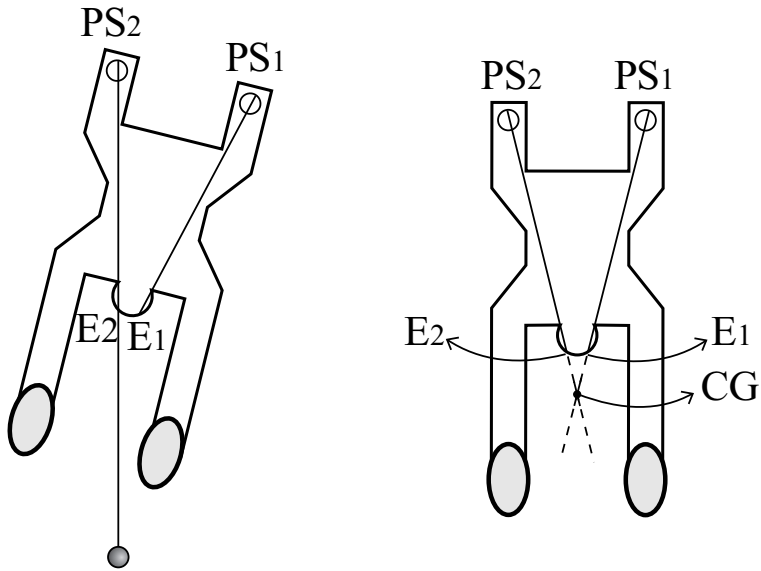



Figura 5.5: Encontrando o *CG* do equilibrista com massa de modelar nas duas mãos.

Se prolongarmos estas duas verticais, veremos que elas se cruzam fora da cabeça, em um ponto ao longo do eixo de simetria do boneco, entre a ponta da cabeça e as mãos (ou entre a ponta da cabeça e a parte inferior da massa de modelar), Figura 5.5b.

É interessante solicitar que cada aluno faça um desenho como este em seu caderno, em tamanho real, utilizando seu próprio boneco com massa nas mãos como modelo. Para encontrar a localização exata do *CG* do boneco com massa de modelar nas mãos, solicita-se aos alunos que equilibrem o boneco de lado, em um plano vertical, apoiando algum ponto do braço sobre o alfinete horizontal, até que o eixo do corpo fique paralelo à horizontal. O centro de gravidade localiza-se no cruzamento do eixo de simetria do corpo com a vertical passando pelo alfinete, obtida com o auxílio do fio de prumo, Figura 5.6.

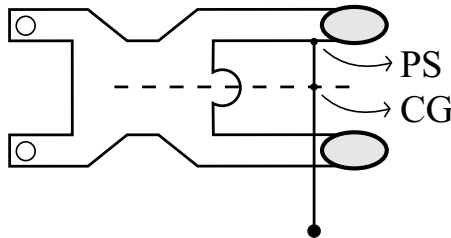



Figura 5.6: Outra maneira de encontrar o *CG* de um equilibrista com massa de modelar nas duas mãos.

Só depois que os próprios alunos realizaram todas estas atividades é que o professor deve dar as explicações. Diz então que nos casos sem massa de modelar não se conseguia equilibrar o boneco de cabeça para baixo, nem sentado sobre o dedo indicador, já que o centro de gravidade no peito do equilibrista ficava sempre acima do ponto de apoio PA. E estas são situações de equilíbrio instável. Qualquer perturbação sobre o dedo ou sobre o boneco faz com que ele tombe, pois a tendência do CG é sempre de cair aproximando-se da Terra, ver a Figura 5.7. Também não se conseguia equilibrar o boneco na horizontal com o dedo sob a cabeça já que não havia nenhum apoio sob o CG no meio do peito. Logo, ao soltar o boneco, o CG sempre caía.

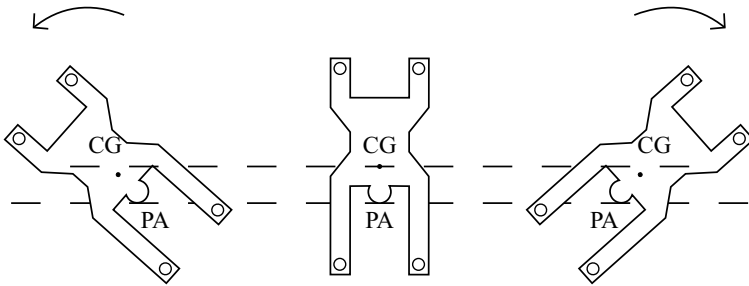



Figura 5.7: Equilíbrio instável.

Por outro lado, quando se coloca massa de modelar nas mãos do boneco e ele fica equilibrado de cabeça para baixo, o CG passa a ficar abaixo do dedo, ou seja, abaixo do ponto de suspensão PS. Esta é uma situação de equilíbrio estável. Se girarmos o boneco no sentido horário ou no sentido anti-horário, subimos o CG em relação à posição de equilíbrio, Figura 5.8.

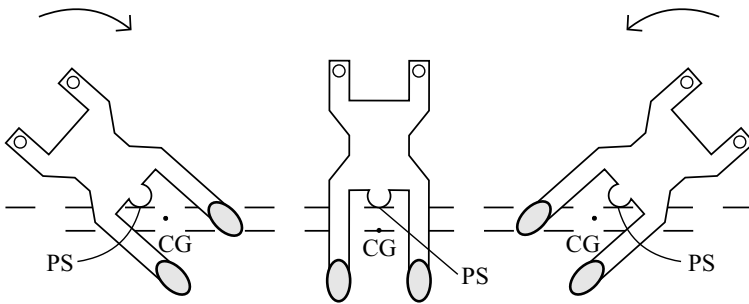



Figura 5.8: Equilíbrio estável com massa de modelar nas mãos.

O mesmo ocorre se tombarmos o boneco para frente ou para trás, isto é, com o nariz ou com a nuca do boneco se aproximando da Terra. Também nestes casos subimos o CG. Ou seja, qualquer movimento do boneco ao redor do ponto de suspensão PS faz com que seu CG suba. Como a tendência do

CG é sempre a de cair devido à gravidade terrestre, ele vai voltar à posição de equilíbrio estável, que é a posição na qual o CG fica o mais baixo possível.

Quando ele fica sentado no dedo com massa nos pés, novamente o CG fica entre a ponta inferior da massa e o ponto de suspensão PS, Figura 5.9.

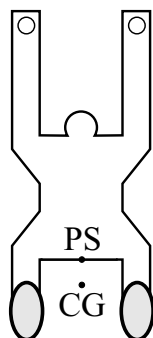



Figura 5.9: Um boneco sentado em equilíbrio com massa de modelar nos pés.

Qualquer rotação do boneco ao redor do ponto de suspensão PS faz com que suba o CG. A gravidade faz então com que o CG caia, com o boneco voltando a ficar sentado no dedo.

Quando colocamos massa de modelar nas mãos e pés do boneco, tal que ele fique deitado na horizontal apoiado pelo dedo indicador na vertical sob a cabeça do boneco, o CG também fica verticalmente abaixo do ponto de suspensão. Neste caso é difícil localizar exatamente o CG, mas apresentamos na Figura 5.10 um boneco bem deformado para conseguir ilustrar a localização do CG.

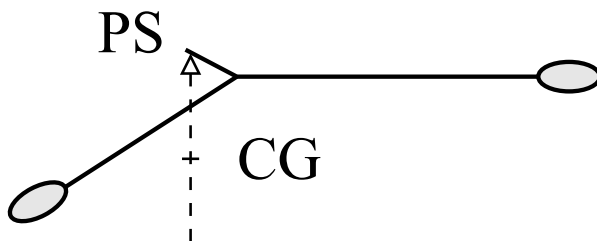



Figura 5.10: Um boneco horizontal em equilíbrio com massa de modelar nas mãos e nos pés.

O corpo está na horizontal, a cabeça um pouco levantada, os braços um pouco inclinados para baixo, as massas estão nas mãos e pés do boneco. O ponto de suspensão PS é representado por um pequeno triângulo abaixo da cabeça. O novo CG não está mais no peito do boneco (como no caso sem massa de modelar), mas sim em algum ponto verticalmente abaixo do PS, entre o PS e o plano que passa pelas massas de modelar nas mãos e pés do boneco.

Ou seja, todos os fenômenos observados com o equilibrista podem ser explicados com as observações experimentais básicas e com as propriedades do CG apresentadas anteriormente. Mas é extremamente enriquecedor que os próprios alunos realizem esta atividade em sala de aula, cada um com seu equilibrista e com sua massa de modelar, já que isto causa um efeito muito marcante sobre cada estudante. O sentimento de mistério e de admiração causados por esta prática são impressionantes. Depois desta atividade lúdica eles conseguem incorporar todos os aspectos principais ligados ao CG.

5.2 Brinquedos de Equilíbrio

Além do equilibrista homem, pode-se fazer também de papel cartão uma equilibrista mulher, ver a Figura 5.11. O princípio de funcionamento é igual ao do boneco. Em vez de usar massa de modelar nas mãos e nos pés, pode-se usar também chumbo de pesca ou outros materiais apropriados. Caso se queira fazer uma figura mais duradoura, é melhor recortá-la em lâmina de madeira e usar chumbo de pesca pois estes materiais não ressecam e não rasgam facilmente.

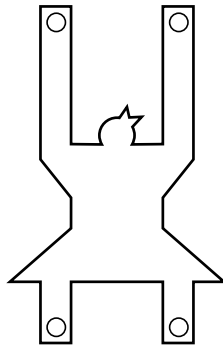



Figura 5.11: Uma equilibrista.

Podem ser feitas outras figuras simétricas como a borboleta, o papagaio ou o sapo, [Gas03, pág. 141], Figura 5.12. As bolas pretas nestas figuras representam pesos adicionais (por exemplo, massa de modelar).

É comum encontrar-se em lojas de presentes o passarinho que fica apoiado na ponta do bico. Em geral ele é de plástico, tendo chumbo escondido nas pontas das asas e, às vezes, no rabo. Ele também pode ser feito de papel cartão, como mostrado no modelo da Figura 5.13.

Neste caso coloca-se massa de modelar ou pequenos chumbos de pesca sob as pontas das asas e sob o rabo até que ele fique na horizontal apoiado sob o bico. A maior parte das pessoas acredita que neste caso o CG está exatamente na ponta do bico. Mas como já afirmamos anteriormente, na situação de equilíbrio o CG não vai estar exatamente no bico, mas um pouco abaixo dele, entre a extremidade inferior dos chumbos e o bico. Quando balançamos um pouco

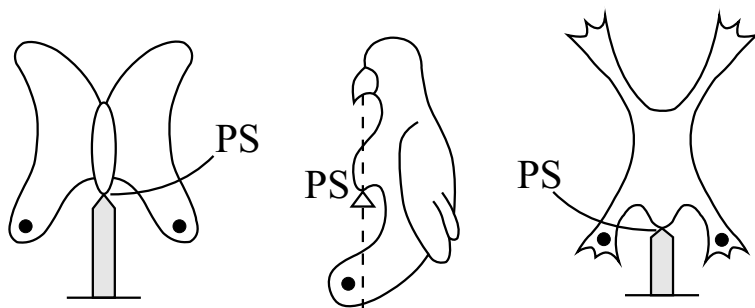



Figura 5.12: Uma borboleta, um papagaio e um sapo.

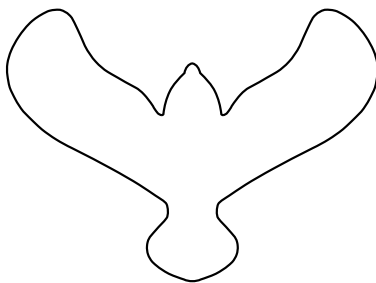



Figura 5.13: Um pássaro equilibrista que pode ficar parado em um plano horizontal ao ser apoiado com um suporte vertical sob o bico.

o passarinho (subindo ou abaixando uma das asas, ou então subindo ou abaixando o rabo), ele vai oscilar ao redor do bico até voltar ao repouso na posição horizontal. Neste caso o CG está na posição mais baixa possível.

O boneco equilibrista que fizemos na atividade anterior funciona exatamente como este passarinho quando está equilibrado na horizontal com o dedo indicador vertical colocado debaixo da cabeça do boneco. Os pesos apropriados colocados nas mãos e nos pés do boneco, tal que ele fique equilibrado na horizontal, fazem com que o CG fique verticalmente abaixo da cabeça. A vantagem do boneco em relação ao passarinho comprado nas lojas é que alterando a quantidade e o local onde colocamos a massa de modelar, podemos deixar o equilibrista não apenas na horizontal como o passarinho, mas também na vertical de cabeça para cima ou de cabeça para baixo.

Existem também figuras de equilíbrio feitas de lâminas homogêneas que não utilizam qualquer peso adicional. Um dos exemplos mais interessantes é a arara ou o tucano mostrados nas Figuras 5.14, [Fer].

Estas figuras podem ser feitas de cartão duro. O pé pode ser um palito ou uma agulha. No caso do tucano apresentado na Figura 5.14, o pé é apenas o papel cartão cortado na forma de um triângulo. O importante é que o tucano tenha um rabo grande, tal que o centro de gravidade fique no espaço vazio entre

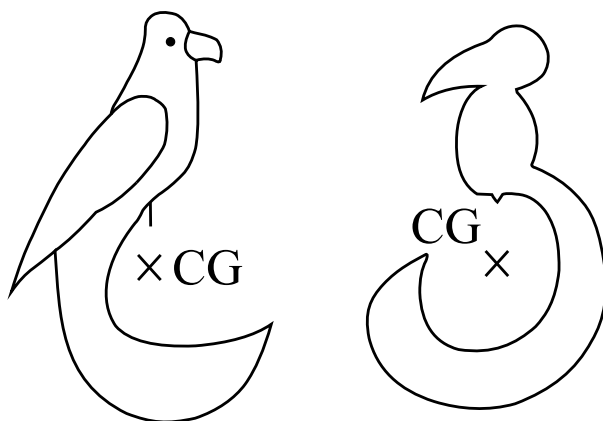



Figura 5.14: A arara e o tucano que ficam em equilíbrio em um plano vertical.

a ponta do pé e o rabo. Quando isto ocorre, o tucano fica equilibrado na vertical apoiado pela ponta do pé. Qualquer perturbação faz com que ele oscile ao redor desta posição de equilíbrio.

Outro brinquedo conhecido por todos é o João bobo ou João-teimoso, [Gas03, págs. 148-150]. Ele funciona baseado nos mesmos princípios que já vimos até aqui. Para construir um brinquedo assim basta que se utilizem dois hemisférios ou cascas esféricas de isopor, além de um chumbo ou outro objeto pesado. O CG da esfera de isopor fica no centro da esfera. O CG do chumbo fica no centro do chumbo. Quando colocamos o chumbo no fundo de um dos hemisférios, o CG do conjunto fica entre o chumbo e o centro da esfera, Figura 5.15.

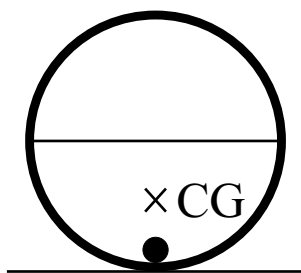



Figura 5.15: O João bobo.

Esta é a posição de equilíbrio estável do João bobo, já que o CG do conjunto está na posição mais baixa possível. Quando a esfera gira no sentido horário ou no sentido anti-horário, sobe o CG. A gravidade terrestre faz com que o boneco volte à posição anterior, Figura 5.16.

A tartaruga-cambalhota é um outro brinquedo interessante, [Gas03, págs. 151-153]. É um novo modelo de João-teimoso no qual o peso está colocado assimetricamente em relação a um hemisfério, Figura 5.17.

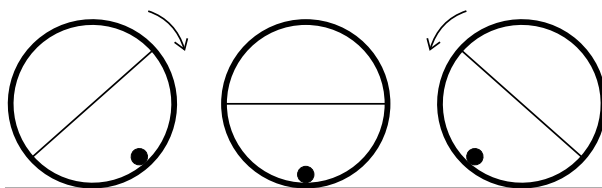



Figura 5.16: Equilíbrio estável do João bobo.

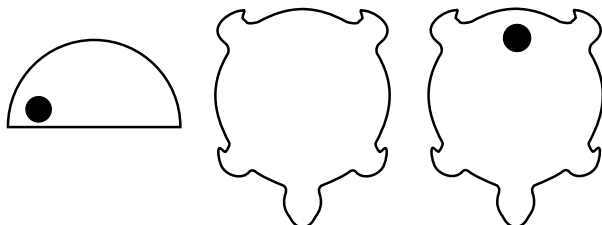



Figura 5.17: A tartaruga-cambalhota.

Neste caso utiliza-se apenas um hemisfério, um peso e uma figura plana de papel cartão com o mesmo diâmetro do hemisfério mas com quatro pernas e uma cabeça para simular o formato de uma tartaruga. O peso deve ficar do lado oposto à cabeça. Podemos segurar a tartaruga de cabeça para baixo com suas pernas em um plano horizontal, apoiando-a pelo queixo. Ao soltá-la nesta posição ela dá uma cambalhota e cai de pé em sua posição normal, Figura 5.18.

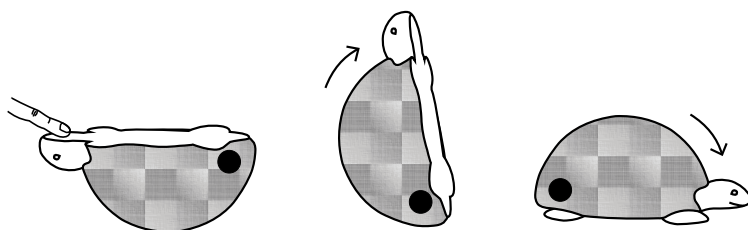



Figura 5.18: A tartaruga-cambalhota em ação.

O motivo para este comportamento é que a posição inicial da tartaruga não é de equilíbrio pois o CG não está no ponto mais baixo possível. Na posição de equilíbrio estável seu corpo fica inclinado. Pequenas perturbações ao redor da posição de equilíbrio estável fazem com que a tartaruga oscile ao redor desta posição. Quando a colocamos de cabeça para baixo na horizontal e a soltamos, ela começa a se deslocar abaixando o CG. Mas como adquire bastante energia cinética e só temos um hemisfério (ao contrário do João bobo que tem a forma externa esférica ou simétrica em relação à posição de equilíbrio estável), ela acaba dando uma cambalhota ao ultrapassar a posição na qual o plano das

pernas chega à vertical.

5.3 Equilíbrio de Botequim

É comum em bares e lanchonetes realizar-se algumas brincadeiras de equilíbrio. Todas elas podem ser explicadas com os princípios já apresentados aqui. Mas elas não deixam de causar efeitos surpreendentes.

Uma das mais comuns é a brincadeira na qual uma rolha é atravessada por um prego ou por um palito de dentes ao longo de seu eixo de simetria, tal que o prego ou palito atravessem a rolha. Em seguida espetam-se dois garfos metálicos na rolha, inclinados para baixo na direção da ponta do prego. O conjunto pode ser então equilibrado colocando a ponta do prego sobre a tampa de uma garrafa de refrigerante ou de cerveja, [Gas03, pág. 144], Figura 5.19a.

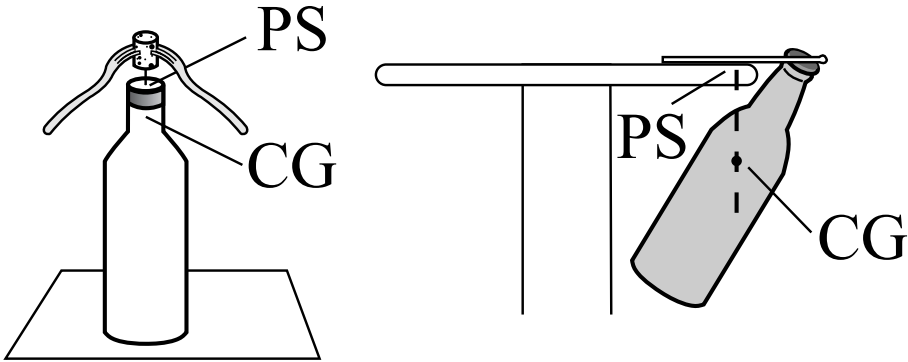



Figura 5.19: Duas situações interessantes de equilíbrio.

Muitas pessoas acham que o centro de gravidade está na ponta do prego. Mas de fato a ponta do prego é apenas o ponto de sustentação PS do sistema. No equilíbrio estável, como já vimos, o CG localiza-se verticalmente abaixo do PS. Para perceber que este é um equilíbrio estável pode-se soprar um dos garfos tal que o sistema gire ao redor do eixo vertical. Também é possível soprar de leve um dos garfos verticalmente (ou abaixá-lo ligeiramente com um dedo, soltando-o do repouso). O sistema vai oscilar ao redor do plano horizontal, parando na posição de equilíbrio.

Outra situação interessante é a de uma cerveja cheia, com tampa, apoiada na borda de uma mesa fina por um abridor de garrafa, como na Figura 5.19b, [Gas03, pág. 144]. O PS ao longo do plano do abridor estará mais uma vez verticalmente acima do CG ao longo do eixo de simetria da garrafa. Para testar esta brincadeira é bom colocar alguma almofada ou suporte macio debaixo da garrafa. Com isto evita-se que quebre caso caia enquanto se está praticando a experiência.

Uma das situações mais notáveis e impressionantes utiliza um garfo metálico fincado a uma colher metálica. Atravessa-se um palito de dentes parcialmente

pelos dentes do garfo. Neste momento o ideal é equilibrar o conjunto pelo dedo indicador na vertical colocado debaixo do palito, Figura 5.20.

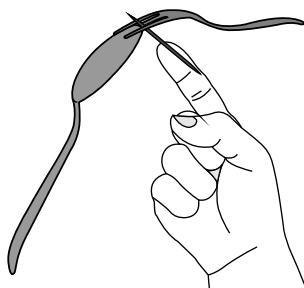



Figura 5.20: Um garfo e uma colher equilibrados por um palito de dentes.

Com isto estamos localizando o PS do conjunto composto pelo garfo, colher e palito. Pode-se então prosseguir com a brincadeira alcançando um efeito ainda mais notável. Apóia-se então um segundo palito na boca de uma garrafa de cerveja aberta. Enquanto este segundo palito é firmado por uma mão, apóia-se o primeiro palito com seu PS colocado sobre a ponta deste segundo palito. Com um pouco de prática consegue-se finalmente soltar o sistema tal que ele fique em equilíbrio na posição mostrada na Figura 5.21.

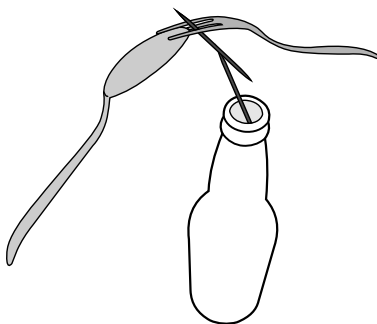



Figura 5.21: O primeiro palito é apoiado pela ponta de um segundo palito colocado na boca de uma garrafa.

Novamente o CG do sistema vai estar verticalmente abaixo do PS. O impressionante desta brincadeira é que o PS está apoiado apenas por um ponto, ou seja, a ponta do segundo palito. Muitas pessoas ficam muito admiradas com este equilíbrio por acharem, erroneamente, que o CG está exatamente no ponto de contato dos dois palitos. E o equilíbrio é razoavelmente estável. Para verificar isto basta que se sopre de leve a colher na horizontal, fazendo com que o sistema gire na horizontal ao redor de um eixo vertical passando pelo PS. Pode-se também soprar verticalmente de leve sobre a colher (ou abaixá-la lentamente com um dedo e então soltando-a do repouso). Neste caso o sistema oscila ao

redor do plano horizontal, voltando depois à posição de equilíbrio original.

5.4 Equilíbrio do Corpo Humano

Várias brincadeiras interessantes podem ser feitas relacionadas ao equilíbrio de um ser humano, [sea]. As pernas e os braços de uma pessoa podem se deslocar de maneira independente do peito. Os braços, por exemplo, podem ficar para cima, para baixo, para frente, para trás, esticados, presos junto ao peito etc. Tudo isto altera a posição do CG de uma pessoa.

Vamos inicialmente analisar situações em que uma pessoa esteja em pé sobre uma superfície plana. O CG está então sobre o solo. Como já vimos anteriormente, só é possível um equilíbrio nesta situação quando o CG está verticalmente acima da superfície de apoio. Quando uma pessoa está em pé seu CG está aproximadamente no meio do seu peito. Ela vai conseguir ficar equilibrada enquanto a projeção vertical do CG estiver dentro da região limitada por seus pés, Figura 5.22a. Quando a pessoa abre as pernas, aumenta esta região, Figura 5.22b. Com isto amplia-se a estabilidade de seu equilíbrio, como vimos pela Eq. (4.2).

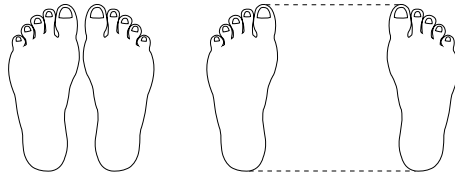



Figura 5.22: Região de equilíbrio para uma pessoa em pé.

Uma primeira brincadeira é solicitar que uma pessoa na classe toque os pés com as mãos, sem dobrar os joelhos. Depois que ela faz isto, solicita-se que repita o procedimento. Só que agora de costas para uma parede, com os calcanhares encostados na parede. Ela não consegue. Para entender o que ocorre, o ideal é colocar a pessoa de lado para a classe, de perfil. Devem ser feitos também desenhos na lousa. Quando a pessoa está em pé, a projeção vertical do seu CG no peito passa sobre o pé. Ela só consegue tocar os pés com as mãos ao afastar a bunda para trás e colocar a cabeça para frente, tal que a projeção do CG continue caindo sobre a região dos pés, Figura 5.23a. Ao se encostar na parede, a pessoa não consegue mais chegar a esta posição. Ao abaixar os braços e o peito a projeção vertical do CG sai fora da área ocupada pelos pés, como mostra a Figura 5.23b, já que a parede impede a bunda de se afastar para trás. A pessoa então perde o equilíbrio e não consegue alcançar o objetivo proposto.

Outra brincadeira é a de se equilibrar sobre um pé afastando a outra perna lateralmente para fora do corpo. Todos conseguem isto. Solicita-se então que a pessoa repita o procedimento mas agora com o primeiro pé e o ombro encostados de lado em uma parede. Ninguém consegue se manter nessa posição ao afastar a outra perna lateralmente, levantando-a do solo. A explicação é a mesma da

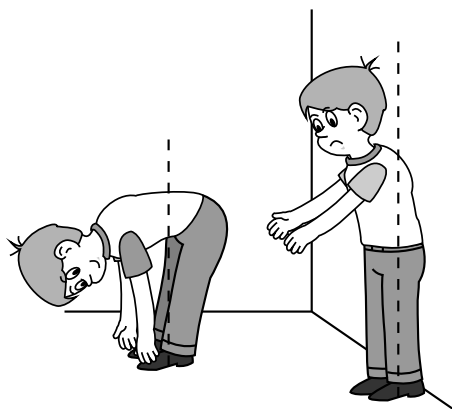



Figura 5.23: Pessoa em equilíbrio tocando os pés com as mãos.

situação anterior. Quando a pessoa está na posição normal com os dois pés no chão, a projeção vertical do CG cai entre os pés. A pessoa só consegue ficar equilibrada sobre um pé com a outra perna afastada lateralmente ao inclinar o corpo para o lado oposto, tal que a projeção do CG caia sobre o pé que está no chão, Figura 5.24b. Agora vamos ver o caso em que a pessoa está encostada de lado a uma parede, com o pé e o ombro juntos à parede. Ao afastar lateralmente a outra perna a tendência do corpo é de se afastar para o lado oposto. Mas a parede impede este deslocamento da parte superior do corpo, ver a Figura 5.24a. A projeção vertical do CG neste caso com a perna afastada cai fora da região do pé junto à parede. O CG começa então a se aproximar do solo, a pessoa perde o equilíbrio e não consegue alcançar o objetivo desejado.

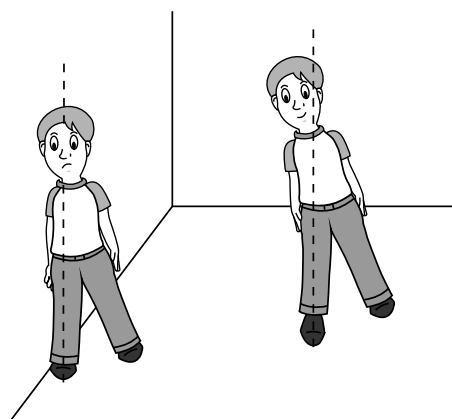



Figura 5.24: Pessoa se equilibrando sobre um pé.

Uma terceira brincadeira que segue o mesmo princípio é a de solicitar que alguém fique na ponta dos pés, levantando os calcanhares. Todos conseguem,

Figura 5.25a. Solicita-se então que a pessoa repita o procedimento encostando a ponta dos pés e o nariz em uma parede. Observa-se que nesse caso a pessoa não consegue levantar os calcanhares e permanecer em equilíbrio. A explicação é a mesma que nos casos anteriores, só que agora com movimentos de menor amplitude. Ou seja, a parede impede o deslocamento do corpo para a parte frontal. Com isso a projeção vertical do CG fica atrás da ponta dos pés e acabamos perdendo o equilíbrio, Figura 5.25b.

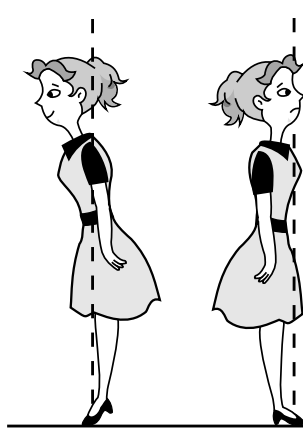



Figura 5.25: Pessoa se equilibrando na ponta dos pés.

Uma das experiências mais interessantes mostra uma distinção na localização dos centros de gravidade de mulheres e de homens. Devido ao quadril mais avantajado, a maioria das mulheres possui um CG um pouco mais baixo do que o CG dos homens de mesma altura. Solicita-se que uma moça fique ajoelhada e apoiada com os cotovelos junto aos joelhos, como se estivesse rezando no chão. Coloca-se então uma caixa de fósforos no chão na ponta dos dedos da moça. Solicita-se que ela agora coloque as mãos para trás das costas e que tente derrubar a caixa de fósforos com o nariz, sem cair, voltando depois para a posição inicial, Figura 5.26.

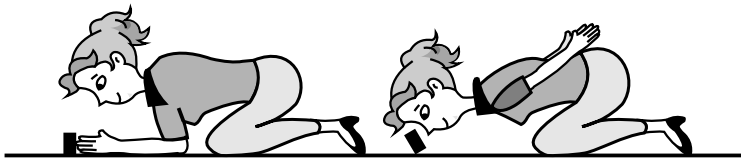



Figura 5.26: Uma mulher derrubando uma caixa de fósforos.

A maioria das moças consegue depois de algumas tentativas. Já os rapazes normalmente não conseguem isso. Na posição em que o nariz da moça está tocando a caixa de fósforos, a projeção vertical do seu CG cai sobre a região ocupada por seus joelhos e pés. Normalmente o CG dos rapazes é mais alto do

que o das moças. Quando estão na mesma posição a projeção do CG de um rapaz vai estar fora da região ocupada por seus joelhos e pés, estando posicionado entre os joelhos e a caixa de fósforos. Como a tendência do CG é de cair quando não tem um apoio por baixo, o rapaz perde o equilíbrio e não consegue derrubar a caixa de fósforos (para não cair de nariz no chão).

Outras situações de equilíbrio ocorrem quando o CG de uma pessoa está abaixo de um ponto de sustentação PS. O exemplo mais interessante é o de um brinquedo representando um equilibrista na corda bamba de um circo, Figura 5.27. O CG de uma pessoa está no peito e ela tenderia a cair ao estar apoiada sobre uma fina corda esticada, já que qualquer perturbação da posição vertical tenderia a baixar seu CG. Para conseguir manter-se equilibrado, o boneco deste brinquedo segura um longo cabo curvo com pesos nas pontas. O objetivo do cabo é fazer com que o CG do sistema (boneco mais cabo) fique abaixo dos pés do boneco. Qualquer perturbação da posição vertical fará com que suba o CG. Isto ocorrerá não apenas para rotações horárias ou anti-horárias, mas também se o equilibrista inclinar-se para frente ou para trás. Como a tendência do CG é a de cair quando tem liberdade para isso, o equilibrista acaba voltando à posição vertical. Esta é uma posição de equilíbrio estável. Esta é a situação ideal de equilíbrio no caso de corpos rígidos, como no caso de um modelo de equilibrista na corda bamba, com o equilibrista e o cabo feitos de metal e rigidamente ligados entre si, com o cabo curvo e com peso nas pontas, como ocorre em alguns brinquedos e enfeites.

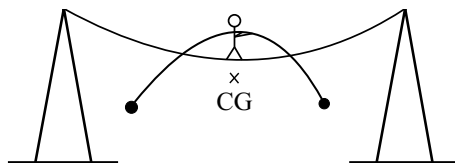



Figura 5.27: Brinquedo representando um equilibrista na corda bamba.

A atividade lúdica que fizemos com o equilibrista de papel cartão apresenta uma situação análoga a esta. Não conseguimos manter o boneco equilibrado assentado no palito de churrasco, por exemplo. Mas quando colocamos uma quantidade suficiente de massa de modelar na parte debaixo de seus pés, conseguimos equilibrá-lo sentado no palito, tal que seu corpo fique em um plano vertical. Ele pode tombar para um lado, para outro, para frente ou para trás que acaba voltando à posição de equilíbrio estável. Nesta posição o CG está verticalmente abaixo do PS e no ponto mais baixo possível.

No caso de uma pessoa real na corda bamba de um circo, o cabo em geral é reto, comprido e pesado. Neste caso o CG do conjunto equilibrista-cabo está acima dos pés da pessoa. A tendência da pessoa é cair com qualquer perturbação, já que a projeção vertical do CG vai se afastar para um lado ou para outro da corda. Para conseguir se equilibrar nestes casos a pessoa fica movimentando o cabo para um lado ou para outro, sempre em direção oposta ao seu movimento inicial de queda. Quando a pessoa começa a cair para um

dos lados, o cabo é movimentado para o lado oposto (isto é, o centro do cabo não fica mais entre as duas mãos do equilibrista, mas vai para o lado oposto em relação ao lado do início da queda da pessoa). Com isto a projeção do CG do conjunto equilibrista-cabo volta a estar sobre a corda. Quando a pessoa começa a cair para o outro lado, o cabo é deslocado para a extremidade oposta. Para que os deslocamentos do cabo não sejam muito grandes, é importante que o cabo seja pesado. O equilibrista fica então movimentando o cabo para a esquerda e para a direita enquanto caminha pela corda bamba, [Wal08, págs. 46-47].

5.5 O ET

Um outro brinquedo muito curioso é o ET, [Fer06]. Ele é feito com duas rolhas, dois palitos de dente, quatro palitos de churrasco, pedaços de papel cartão para fazer as mãos e os pés, mais um suporte vertical para apoiar o boneco. Em vez dos palitos de dente, também é possível utilizar pregos ou agulhas.

O boneco é constituído de duas partes independentes. Caso uma das rolhas seja menor que a outra, deve ser usada na parte superior. Atravessa-se um palito de dente, prego ou agulha pelo eixo de simetria da rolha. Os palitos de churrasco que formarão os braços do boneco deverão ser cortados uns 3 cm antes de serem introduzidos na rolha. Eles devem ficar inclinados para baixo, do mesmo lado por onde sai o palito de dente. Esta também será a forma geral do corpo e das pernas do ET, Figura 5.28a.

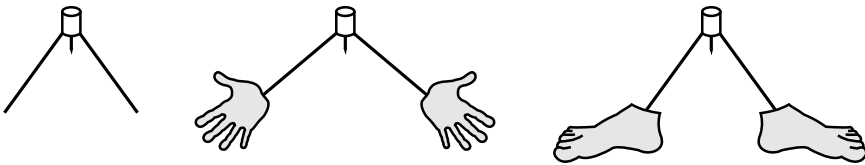



Figura 5.28: Construção das duas partes do ET.

Nas pontas exteriores dos palitos de churrasco são presos pedaços de cartolina no formato de mãos. Quando a parte superior estiver construída, deve-se tentar equilibrá-la no dedo apoiando-a apenas pela ponta inferior do palito de dentes. Caso ela esteja caindo para um lado ou para outro, pode-se aumentar o peso ou tamanho das mãos, ou então colocar os palitos de churrasco com uma inclinação mais próxima da vertical. O importante é que o CG da parte superior fique abaixo da ponta inferior do palito de dentes na posição de equilíbrio estável, Figura 5.28b.

Constrói-se da mesma maneira a parte inferior do boneco. Neste caso pode ser necessário aumentar de forma exagerada o tamanho ou o peso dos pés do ET para que se consiga abaixar bem o CG de todo o conjunto. Novamente deve-se

testar que também a parte inferior fique bem equilibrada em um plano vertical antes de prosseguir com a brincadeira, Figura 5.28c.

Feito isto, pode-se apoiar a parte superior do boneco colocando o palito de dentes sobre a rolha inferior. Depois é só colocar a rolha inferior apoiada com o seu palito de dentes sobre o suporte fixo. A montagem final deve ser algo parecido com a Figura 5.29.

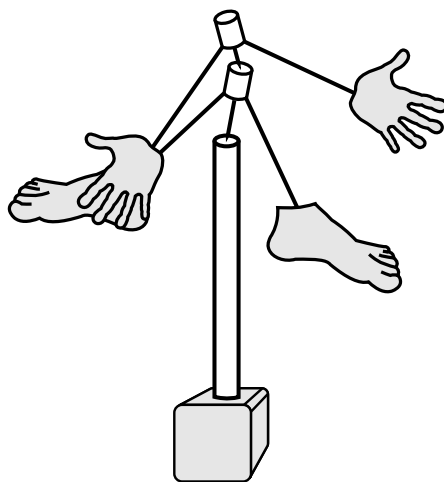



Figura 5.29: O ET montado.

Este boneco não é um corpo rígido pois as duas partes são livres para oscilar ou girar independentemente entre si. Apesar disso cada parte do ET pode ser considerada, separadamente, como um corpo rígido. Balançando ou soprando o boneco consegue-se um efeito muito divertido e curioso.

Cada uma das partes só vai ficar equilibrada se seu CG estiver abaixo da ponta inferior do seu palito de dentes na posição de equilíbrio. E o CG do boneco como um todo precisa ficar abaixo da ponta inferior do palito de dentes de baixo para que ele fique equilibrado. Apesar disto existem duas variações possíveis. Na primeira o CG da parte superior do boneco fica abaixo da ponta inferior do palito de dentes de baixo. E na segunda o CG da parte superior do boneco fica acima da ponta inferior do palito de dentes de baixo.

Este é um brinquedo divertido e que pode suscitar várias questões curiosas por parte dos alunos.

Na próxima parte deste livro vamos ver várias definições que já foram apresentadas ao longo dos séculos para o conceito do centro de gravidade. Veremos que sempre foi muito difícil encontrar palavras apropriadas para definir o CG de forma geral. Vários autores importantes lidaram com este tema. Além da definição conceitual, foi importante termos clarificado o procedimento experimental para encontrar de maneira inequívoca este ponto. Em uma parte posterior deste livro vamos lidar com o cálculo teórico do centro de gravidade. Com isto vamos

analisar de todas as formas um dos temas mais importantes e fascinantes de toda a mecânica.

Capítulo 6

Alguns Aspectos Históricos sobre o Conceito do Centro de Gravidade

6.1 Comentários de Arquimedes, Heron, Papus, Eutócius e Simplício sobre o Centro de Gravidade

Apresentamos agora alguns aspectos históricos relacionados ao conceito do centro de gravidade, CG. Em particular, vamos analisar como este conceito foi definido e como ele era obtido experimentalmente. Estamos interessados em ver este aspecto no período em que este conceito surgiu e se estabeleceu. As informações a seguir vieram essencialmente das obras originais de Arquimedes (ver referências ao final do livro), Heron, [Her88], Papus, [Pap82], Heath, [Arc02] e [Hea21], Dijksterhuis, [Dij87], e Duhem, [Duh05], [Duh06] e [Duh91].

A observação de que um corpo rígido pode permanecer em equilíbrio ao ser solto do repouso sobre a superfície da Terra, quando apoiado por baixo por um suporte rígido, é conhecida desde os primórdios da civilização. Apesar disto, o tratamento sistemático e científico das condições que determinam o equilíbrio de corpos sobre a superfície da Terra originou-se na Grécia. Pelo menos é de lá que vêm os documentos mais antigos tratando do centro de gravidade e apresentando resultados teóricos ligados a este conceito.

Arquimedes é a pessoa principal que lidou com este conceito na Grécia antiga. O centro de gravidade também é chamado de baricentro. O prefixo "bari" é um elemento de composição que vem do grego, significando peso, pesado ou grave. Daí surgem outras palavras como barisfera (núcleo central da Terra), bárion (designação das partículas elementares pesadas como o próton e o nêutron) etc. A tradução da expressão grega do CG é "centro do peso." A maneira mais

simples de entender esta expressão e o conceito por trás dela é observar a experiência na qual apoiamos um triângulo na horizontal com o palito de churrasco abaixo de seu baricentro. Para simplificar estamos supondo uma figura plana homogênea, rígida e sem buracos. Vemos da experiência que a figura só fica parada em equilíbrio em um plano horizontal ao ser solta do repouso, quando é apoiada por baixo por um pequeno suporte rígido vertical colocado sob um único ponto da figura, o baricentro. Como todo o peso da figura está apoiado neste ponto, como se estivesse concentrado nele, é natural chamá-lo de centro do peso.

O trabalho mais antigo de Arquimedes que sobreviveu tem como título *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ou *Sobre o Centro de Gravidade das Figuras Planas*, [Arc02, pág. 189] e [Dij87, pág. 286]. No Apêndice B ao final deste livro apresentamos uma tradução da primeira parte deste trabalho. O centro de gravidade já aparece nos postulados 4 a 7, sem qualquer definição anterior:

> "Postulado 4: Nas figuras planas iguais e semelhantes, sobrepostas uma sobre a outra, os centros de gravidade também se sobrepõem um sobre o outro."
>
> "Postulado 5: Nas figuras planas desiguais, mas semelhantes, os centros de gravidade serão situados semelhantemente. Dizemos que pontos estão situados semelhantemente nas figuras semelhantes quando as linhas retas ligando estes pontos aos vértices dos ângulos iguais formam ângulos iguais com os lados homólogos."
>
> "Postulado 6: Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias."
>
> "Postulado 7: O centro de gravidade de toda figura cujo perímetro gira sua concavidade para o mesmo lado tem de estar no interior da figura."

O mais provável é que o CG houvesse sido definido por Arquimedes em algum de seus outros trabalhos relacionados com mecânica que estão atualmente perdidos, a saber: *Sobre os Centros de Gravidade*, *Elementos de Mecânica*, *Equilíbrios*, *Sobre Balanças* ou *Sobre Alavancas*, e *Livro das Colunas*.

Na Proposição 6 do seu trabalho sobre a *Quadratura da Parábola*, Arquimedes afirma que provou teoricamente o seguinte resultado, [Mug71a, pág. 171], [Duh06, pág. 307] e [Duh91, pág. 463]:

> "Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada."

Isto sugere que Arquimedes conhecia a maneira prática apresentada nas experiências que descrevemos anteriormente de se obter o CG de um corpo qualquer. Ou seja, dependura-se o corpo por um ponto de suspensão PS_1,

aguarda-se que o corpo atinja o equilíbrio, e traça-se uma vertical passando por este ponto com o auxílio de um fio de prumo. Dependura-se então o corpo por um outro ponto de suspensão PS_2 que não esteja ao longo da primeira vertical, aguarda-se o novo equilíbrio, e traça-se uma segunda vertical passando por PS_2. O cruzamento das duas verticais é o CG do corpo. Mas é importante enfatizar que para Arquimedes esta não era uma definição do CG. Em vez disto, ele provou teoricamente este resultado utilizando uma definição prévia do que é o CG de um corpo e também algum postulado que está perdido hoje em dia.

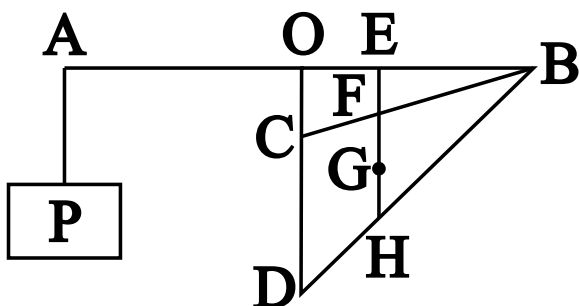
A frase de Arquimedes que acabamos de citar, afirmando que esta proposição foi demonstrada para *todo corpo*, não aparece com esta generalidade na tradução de Heath dos trabalhos de Arquimedes. O trabalho de Heath é uma paráfrase, isto é, ela conserva as idéias originais de Arquimedes, mas as reescreve em notação moderna e omite partes do texto que ele não considerou essenciais. Aqui vai a apresentação feita por Heath das importantes Proposições 6 e 7 do trabalho *Quadratura da Parábola*, [Arc02, pág. 238]. Nestas Proposições a expressão $\triangle BCD$ significa a área do triângulo BCD, que é suposto como tendo densidade uniforme. Isto é, seu peso é proporcional ao tamanho de sua área, o mesmo acontecendo com a área P do retângulo que ele utiliza nesta Proposição.

"Proposições 6,7[1].

Suponha uma alavanca AOB colocada horizontalmente e suspensa em seu ponto médio O. Suponha que um triângulo BCD é suspenso por B e por O, com o ângulo C sendo um ângulo reto ou obtuso, de tal forma que C é ligado em O e CD está na mesma linha vertical que O. Então, se P for uma área tal que, quando suspensa por A, ela mantém o sistema em equilíbrio,

$$P = \frac{1}{3}\triangle BCD \ .$$

Suponha um ponto E sobre OB tal que $BE = 2OE$, e trace EFH paralelo a OCD, encontrando BC e BD em F e H, respectivamente. Seja G o ponto médio de FH.

[1]Nota do Heath: Na Prop. 6 Arquimedes considera o caso separado no qual o ângulo BCD do triângulo é um ângulo reto de tal forma que C coincide com O na figura e F coincide com E. Ele então demonstra, na Prop. 7, a mesma propriedade para o triângulo no qual BCD é um ângulo obtuso, ao tratar o triângulo como a diferença entre dois triângulos retângulos BOD e BOC, e usando o resultado da Prop. 6. Combinei as duas proposições em uma demonstração, por brevidade. O mesmo deve ser dito das proposições que se seguem às Props. 6 e 7.

Então G é o centro de gravidade do triângulo BCD.

Portanto, se forem soltos os vértices B e C, e o triângulo for suspenso ligando F a E, o triângulo vai continuar dependurado na mesma posição anterior, pois EFG é uma linha reta vertical. "Pois isto foi demonstrado[2]."

Portanto, como antes, vai haver equilíbrio.

Assim

$$P : \triangle BCD = OE : AO = 1 : 3 \ ,$$

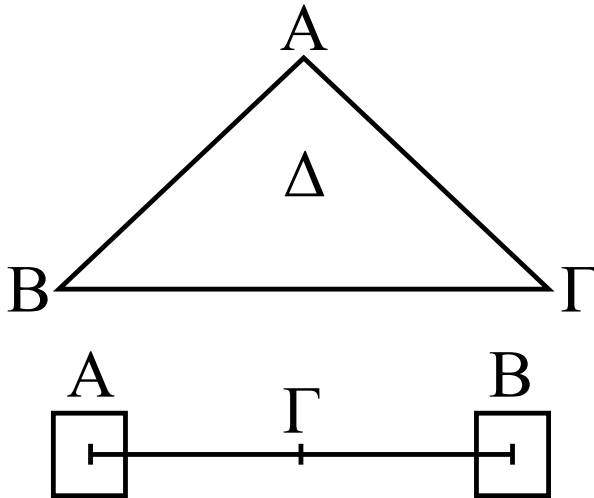
ou

$$P = \frac{1}{3} \triangle BCD \ .''$$

Eutócius de Ascalon (480-540) escreveu comentários que ainda existem sobre três obras de Arquimedes: *Medida do Círculo*, *Sobre a Esfera e o Cilindro*, e *Sobre o Equilíbrio dos Planos*. Aparentemente ele não conheceu outras obras de Arquimedes. Ao comentar o Livro I de *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Eutócius apresenta alguns esclarecimentos sobre o conceito do centro de gravidade, já que este conceito não é definido nesta obra de Arquimedes (ao menos como ela chegou até Eutócius e a nós). As idéias são de Eutócius e não de Arquimedes, mas não deixam de ser interessantes. Citamos aqui as partes relevantes traduzidas a partir da versão em francês publicada em 1972 por Charles Mugler (ele traduziu as obras completas de Arquimedes, assim como os comentários de Eutócius, do grego para o francês), [Mug72, págs. 166-167]:

> "Comentários de Eutócius relativos ao Livro I do Tratado de Arquimedes *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*.
>
> Introdução ao livro I. (...) Nesta obra, Arquimedes define o centro de movimento de uma figura plana como sendo o ponto tal que,

[2]Nota do Heath: Sem dúvida no livro perdido $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\ \zeta\upsilon\gamma\tilde{\omega}\nu$. Conferir a Introdução, Capítulo II, *ad fin.*

quando suspendemos a figura por este ponto, ela permanece paralela ao horizonte, e define o centro de movimento ou de gravidade de duas ou de várias figuras planas como sendo o ponto tal que, quando suspendemos as figuras por este ponto, a haste (ligando as figuras) permanece paralela ao horizonte.

Seja, por exemplo, o triângulo $AB\Gamma$ e em seu interior o ponto $\triangle$, tal que quando o triângulo é suspenso por este ponto, o triângulo permanece paralelo ao horizonte. É então evidente que as partes B e Γ do triângulo se equilibram e que nenhuma das duas se inclina mais do que a outra em relação ao horizonte. Da mesma forma, sendo AB uma haste da balança e as grandezas A e B estando suspensas por ela, se a haste, estando suspensa pelo ponto Γ, mantém as partes A e B em equilíbrio, e permanece paralela ao horizonte, Γ será o ponto de suspensão das grandezas A e B."

Estas são definições claras e intuitivas, como vimos nas primeiras experiências da parte anterior deste livro. Mas são limitadas pois não tratam de figuras planas côncavas ou com buracos, nas quais o CG encontra-se no vazio. Além disso, não se aplicam ao caso de corpos volumétricos. Apesar disto, conseguem ilustrar aspectos muito importantes do CG. É também interessante ver as expressões alternativas usadas para o centro de gravidade: centro de movimento e ponto de suspensão.

Para ter uma idéia de como o conceito do CG pode ter sido definido por Arquimedes, vamos citar aqui algumas passagens que aparecem na obra *Mecânica* do matemático Heron (século I d.C.), na obra *Coleção Matemática* do matemático Papus (século IV d.C.) e nos Comentários do filósofo Simplício (século VI d.C.) da obra *Sobre o Céu*, de Aristóteles (384-322 a.C.). Estes autores discutiram o trabalho de Arquimedes, citam alguns trechos de suas obras atualmente perdidas e seguem, provavelmente, seus conceitos e linhas de raciocínio ao lidarem com a teoria baricêntrica.

Há muita controvérsia sobre o período em que viveu Heron de Alexandria, mas em geral concorda-se que viveu no século I da nossa era. Só existem fragmentos gregos de seu livro *Mecânica*, em três partes. Mas foi preservada uma tradução completa em árabe. A partir desta tradução foram feitas traduções para outras línguas modernas como o francês, em 1893, e o alemão, em 1900.

Heron apresenta uma definição do CG como dada pelo estóico Posidônio, que provavelmente viveu antes de Arquimedes: "O centro de gravidade ou de inclinação é um ponto tal que, quando o peso é dependurado por este ponto, ele fica dividido em duas porções equivalentes," [Her88, Capítulo 24, pág. 93]. Heath já traduz esta frase para o inglês da seguinte forma: "É um ponto tal que, se o corpo é suspenso por ele, o corpo é dividido em duas partes iguais," [Hea21, pág. 350]. Esta definição é vaga e problemática. Em primeiro lugar é difícil saber como um ponto, ou mesmo uma reta vertical passando por este ponto (se interpretarmos assim a frase de Posidônio), pode dividir um corpo volumétrico em duas partes. Mesmo se o corpo for uma figura plana, um ponto não vai dividi-lo em duas partes. E uma reta só vai dividir uma figura plana em duas partes se estiver no mesmo plano que a figura. Logo teríamos de imaginar um triângulo, por exemplo, dependurado em um plano vertical. E mesmo neste caso não são todas as verticais passando pelo CG que vão dividir o triângulo em duas áreas iguais ou em dois pesos iguais. Vamos supor um triângulo homogêneo dependurado em um plano vertical. Já vimos anteriormente que uma reta passando pelo CG e por um dos vértices divide um triângulo em duas partes de mesma área e de mesmo peso. Já uma reta paralela à base e passando pelo CG não divide o triângulo em duas áreas iguais, ver a Figura 4.7. Apesar disso, o triângulo em um plano vertical permanecerá em equilíbrio ao ser solto do repouso se for dependurado pelo CG ou por qualquer outro ponto que esteja verticalmente acima do CG. O mesmo vai acontecer se supormos na definição de Posidônio que o corpo é dividido por um plano vertical passando pelo CG. Neste caso pode-se imaginar um triângulo equilibrado em um plano horizontal apoiado por um plano vertical colocado debaixo dele (na verdade o suporte vertical tem de ter uma pequena espessura, como a borda de uma régua). Caso o plano vertical passe por um vértice e pelo CG, o corpo vai ficar em equilíbrio e a projeção superior deste plano vai dividir o triângulo em duas áreas iguais ou em dois pesos iguais. Mas se o plano vertical for paralelo à base e passar pelo CG, ele não vai dividir o triângulo em duas áreas iguais nem em dois pesos iguais. Apesar disto, o triângulo também ficará em equilíbrio neste caso ao ser solto do repouso, como vimos na Experiência 4.5.

Uma outra expressão utilizada por Heron para designar o CG, além de "centro de peso," é a de "centro de inclinação" ou "centro de queda." Provavelmente esta expressão já era usada na Grécia antiga. Esta é uma expressão interessante e muito instrutiva. Já vimos que a tendência de qualquer corpo mais denso que o ar é a de cair em direção à Terra ao ser solto do repouso. Caso o corpo seja suspenso por um ponto de sustentação PS e solto do repouso, podendo girar ao redor deste ponto, o movimento inicial do CG (supondo que ele não coincida com o PS) é o de cair aproximando-se da Terra. Logo, é como se a tendência de queda estivesse concentrada no CG do corpo.

Em seguida Heron afirma que Arquimedes distinguiu o "ponto de suspensão" do "centro de inclinação." Logo depois apresenta as seguintes palavras: "**O ponto de suspensão é um ponto qualquer sobre o corpo ou sobre a figura não corporal, tal que quando o objeto suspenso é suspendido por este ponto, suas partes ficam em equilíbrio, isto é, ele não oscila nem se inclina**," [Her88, Capítulo 24, pág. 93] e [Hea21, pág. 350]. A expressão "figura não corporal" aqui pode significar o caso em que o CG está no vazio, como no caso de um anel. O que está sendo chamado aqui de "ponto de suspensão" e a definição que Heron apresentou pode ser a maneira como Arquimedes definia o centro de gravidade. Veremos depois uma definição análoga em Papus.

Heron também afirma: "O centro de inclinação em cada corpo é um ponto único em direção ao qual são traçadas as cordas de suspensão que partem dos suportes. O centro de gravidade em certos corpos é exterior à substância dos corpos; é o que ocorre, por exemplo, nos arcos e nos braceletes. As linhas segundo as quais são prolongadas as cordas convergem todas em um ponto comum," [Her88, Capítulo 24, pág. 95]. Ele parece estar descrevendo aqui o procedimento prático de se encontrar o CG através do cruzamento de todas as verticais passando pelos pontos de suspensão nos casos em que o corpo está em equilíbrio, parado em relação à Terra. Este é o procedimento prático mais importante para se encontrar o CG. Ele permite que se obtenha experimentalmente o CG de qualquer corpo rígido, como vimos anteriormente. Heron menciona ainda que o CG não precisa estar, necessariamente, na parte material do corpo, pois pode situar-se no vazio, como no caso de anéis ou de rodas.

Heron menciona ainda que Arquimedes resolveu em seu livro *Sobre Colunas* ou *Sobre Suportes* problemas do seguinte tipo, [Her88, Caps. 25-31] e [Hea21, pág. 350]: Uma viga ou parede pesada é apoiada por vários pilares, eqüidistantes ou não, em número par ou em número ímpar, com a viga ou a parede projetando-se ou não para fora das extremidades dos pilares, encontrando então qual parte do peso total é suportada por cada pilar. Heron ainda diz que os mesmos princípios se aplicam quando o corpo (viga ou parede) é suspenso por cabos. Em outra parte de seu livro Heron considera o problema de um triângulo de espessura uniforme, na horizontal, sendo apoiado por um pilar em cada vértice. Encontra então qual peso é suportado por cada pilar em diversos casos: (a) quando eles suportam apenas o triângulo, (b) quando eles suportam o triângulo mais um dado peso colocado em qualquer ponto sobre ele. Por último, se pesos conhecidos são colocados sobre os vértices do triângulo, Heron encontra o centro de gravidade do sistema. Estende depois sua análise ao caso de polígonos.

Heron cita ainda: "Arquimedes disse que os corpos pesados podem ficar em equilíbrio sem se inclinar ao redor de uma linha ou ao redor de um ponto," [Her88, págs. 93-94]. Ou seja, pode-se evitar que um corpo caia para a Terra suportando-o ao longo de uma linha reta ou em um ponto. Em relação a este aspecto, Papus considera um corpo apoiado em um único ponto por uma vareta vertical colocada embaixo do corpo e afirma que "se o corpo está em equilíbrio, a projeção vertical para cima da vareta tem de passar pelo centro de gravidade [do corpo]," citado em [Hea21, pág. 350], ver também [Pap82, págs. 817-818].

Papus apresenta uma definição explícita do CG, a saber: "**Dizemos que o**

centro de gravidade de qualquer corpo é um certo ponto dentro desse corpo tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o peso assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original," [Pap82, Livro VIII, pág. 815] e [Dij87, pág. 299]. Outra afirmação análoga: "**É claro também que, se imaginarmos que o corpo é suspenso pelo seu centro de gravidade, ele não girará e permanecerá em repouso mantendo a posição inicial que assumiu com a solicitação [gravitacional]**," [Pap82, Livro VIII, pág. 818].

Simplício apresenta a mesma definição, atribuindo-a explicitamente a Arquimedes: "**O centro de gravidade é um certo ponto no corpo tal que, se o corpo for suspenso por uma linha ligada a este ponto, vai permanecer na sua posição sem se inclinar para qualquer direção**," citado em [Hea21, pág. 350].

Podemos ver uma ilustração desta definição na Figura 6.1, que é uma combinação das Figuras 4.41, 4.42 e 4.43. Esta é uma experiência do pensamento, já que talvez seja impossível suspender um corpo exatamente pelo CG deixando-o ao mesmo tempo livre para girar ao redor deste ponto. De qualquer forma a idéia é que se pudermos conceber uma experiência assim, o que aconteceria é que o corpo permaneceria equilibrado em qualquer posição da qual fosse solto em repouso. Por exemplo, um triângulo horizontal vai ficar em equilíbrio para todos os ângulos α entre o segmento CGV_1 e o segmento CGL. Um triângulo vertical vai ficar em equilíbrio para todos os ângulos β entre o segmento CGV_1 e a vertical indicada por um fio de prumo. E um triângulo inclinado vai ficar em equilíbrio para todos os ângulos γ entre a normal ao plano do triângulo e a vertical.

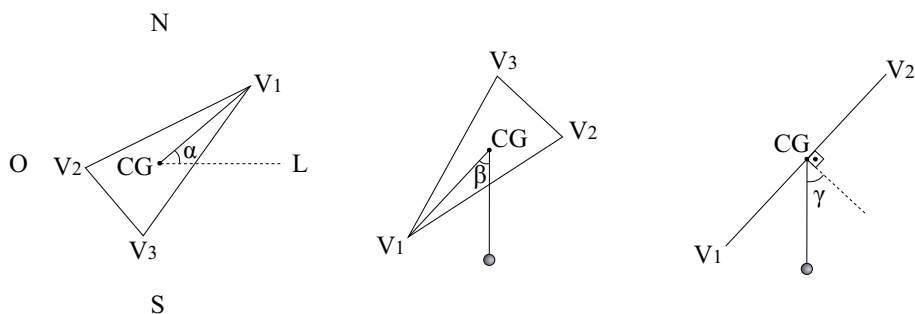



Figura 6.1: Um corpo suspenso exatamente pelo centro de gravidade fica em equilíbrio para todas as suas orientações em relação à Terra.

Em uma experiência real em que o corpo está dependurado por um ponto de suspensão PS diferente do CG, tendo liberdade para girar ao redor do PS, o corpo só permanece em equilíbrio ao ser solto do repouso quando é liberado em uma posição preferencial com o CG verticalmente abaixo do PS. Caso isto não ocorra, o corpo vai girar ao redor do PS em uma direção tal que o movimento inicial do CG é o de se aproximar da superfície da Terra. No equilíbrio final o

PS e o *CG* estarão ao longo de uma vertical, com o *CG* localizado *abaixo* do *PS*.

O procedimento prático que Papus apresenta para se obter o *CG* é apresentado a seguir, [Pap82, Livro 8, págs. 816-818]. Ele imagina um plano vertical retangular sobre o qual um corpo vai ficar apoiado, equilibrado sobre a extremidade superior horizontal do plano. A projeção para cima deste plano divide o corpo em duas partes que se equilibram mutuamente. Depois disto o corpo é apoiado novamente sobre a mesma extremidade superior do plano, mas agora com o corpo em uma posição diferente. As projeções dos dois planos sobre o corpo encontram-se em uma linha vertical. O corpo também fica em equilíbrio ao ser apoiado por esta linha, como se estivesse apoiado sobre um suporte vertical embaixo dele. Repete-se o procedimento em duas novas posições do corpo equilibrado sobre o plano vertical, até se obter uma outra linha vertical. O cruzamento das duas verticais é o *CG* do corpo. De acordo com Papus, esta é a parte mais essencial da teoria baricêntrica. Papus afirma ainda que os elementos que são demonstrados por meio desta doutrina são ensinados nos livros *Sobre os Equilíbrios*, de Arquimedes, e *Mecânica*, de Heron.

Este procedimento descrito por Papus é análogo à nossa definição prática *CG*7. Ou seja, o procedimento é análogo a equilibrar o corpo em duas posições diferentes, apoiado sobre uma mesma vareta vertical. Marcam-se no corpo as projeções superiores destas duas verticais. O cruzamento das projeções é o *CG* do corpo. Isto é semelhante ao cruzamento das projeções verticais para baixo quando o corpo é suspenso por dois pontos diferentes, descrito na nossa definição prática *CG*6.

Tudo isto sugere que estes três autores estavam usando diretamente alguns livros de Arquimedes que atualmente estão perdidos. As definições apresentadas por Heron, Papus e Simplício, enfatizadas em negrito anteriormente, são análogas à nossa definição *CG*8. Eles também apresentaram procedimentos para localizar o *CG* análogos às nossas definições práticas *CG*6 e *CG*7.

6.2 Resultados Teóricos sobre o Centro de Gravidade Obtidos por Arquimedes

Vamos citar os valores que Arquimedes encontrou, teoricamente, para os centros de gravidade de diversas figuras filiformes, planas e volumétricas. Vamos descrever estes resultados usando as próprias palavras de Arquimedes. Encontram-se as demonstrações da maior parte destes resultados nos trabalhos ainda existentes de Arquimedes (em particular em *Sobre o Equilíbrio dos Planos* e em *O Método*). Em alguns casos (como o *CG* do cone) Arquimedes apresenta os resultados dizendo que já foram demonstrados antes. Mas como os cálculos não aparecem em nenhuma obra de Arquimedes de que temos conhecimento, presume-se que foram resolvidos por ele em algum trabalho separado, ou em algum trabalho maior do qual *Sobre o Equilíbrio dos Planos* formava apenas uma pequena parte.

A lei da alavanca será tratada na próxima parte deste livro, logo só vamos apresentar aqui o CG de figuras contínuas. Entre aspas vão palavras textuais de Arquimedes e entre parêntesis citamos o trabalho de onde tiramos a citação.

Figuras filiformes:

A) "O centro de gravidade de qualquer linha reta é o ponto de bisseção da linha reta," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 14] e [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 3, enquanto que em Mugler este é o Lema 4. Isto é, o CG é o ponto que divide o segmento de reta em duas partes iguais.

Figuras planas:

B) "Em todo paralelogramo o centro de gravidade é o ponto de encontro das diagonais," (*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Proposição 10), [Arc02, pág. 195]. "O centro de gravidade de qualquer paralelogramo é o ponto no qual se encontram as diagonais," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 14] e [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 5, enquanto que em Mugler este é o Lema 6.

C) "Em todo triângulo o centro de gravidade é o ponto de encontro das linhas retas ligando os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos]," (*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 14), [Arc02, pág. 201]. "O centro de gravidade de qualquer triângulo é o ponto no qual se cortam as linhas retas traçadas a partir dos pontos angulares até os pontos médios dos lados [opostos]," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 14] e [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 4, enquanto que em Mugler este é o Lema 5.

D) "Em todo trapézio que possui dois lados paralelos entre si, o centro de gravidade está situado sobre o segmento de reta ligando os pontos médios dos lados paralelos em um ponto que divide este segmento de maneira que o segmento parcial que tem como extremidade o ponto médio do menor dos lados paralelos está para o segmento restante assim como a soma do dobro do lado maior e do lado menor paralelos entre si está para a soma do dobro do lado menor e do lado maior paralelos entre si," (*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 15), [Dij87, pág. 312]. Heath apresenta esta proposição da seguinte maneira: "Se AD e BC são os dois lados paralelos de um trapézio $ABCD$, com AD sendo o lado menor, e se AD e BC são divididos ao meio em E e em F, respectivamente, então o centro de gravidade do trapézio está localizado em um ponto G sobre EF tal que $GE : GF = (2BC + AD) : (2AD + BC)$," [Arc02, pág. 201].

E) "O centro de gravidade de um círculo é o ponto que também é o centro [do círculo]," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 15] e [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 6, enquanto que em Mugler este é o Lema 7.

F) Na Proposição 12 de *O Método* Arquimedes encontra o centro de gravidade da metade de um cilindro, isto é, de um cilindro cortado ao meio por um plano que passa através do eixo do cilindro. Este resultado é análogo à obtenção do centro de gravidade de um semicírculo. Ver a discussão em [Arc02,

Suplemento, págs. 38-40].

G) "O centro de gravidade de qualquer segmento compreendido por uma linha reta e por uma parábola divide o diâmetro do segmento de tal forma que a parte próxima do vértice do segmento tem a metade do comprimento da parte próxima à base," (*Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro II, Proposição 8), [Dij87, pág. 353]. Heath apresenta esta Proposição como segue: "Se AO for o diâmetro de um segmento parabólico e G o seu centro de gravidade, então $AG = (3/2)GO$," [Arc02, pág. 214]. Aqui A é o vértice do segmento parabólico.

Figuras volumétricas:

H) "O centro de gravidade de qualquer cilindro é o ponto de bisseção de seu eixo," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 15] e [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 7, enquanto que em Mugler este é o Lema 8.

I) "Em qualquer prisma o centro de gravidade é o ponto que divide o eixo em duas partes iguais," (*O Método*), [Mug71b, pág. 85]. Em Mugler este é o Lema 9. Este Lema não aparece em Heath, [Arc02, Suplemento]. O "eixo" a que se refere aqui é o segmento de reta unindo os centros de gravidade das duas bases, como fica evidente da aplicação que Arquimedes faz desta palavra na Proposição 13 de *O Método*, [Dijkstherhuis, 1987, pág. 316, nota 1]. Um prisma é um poliedro no qual duas faces são polígonos paralelos congruentes, e as outras faces são paralelogramos.

J) "O centro de gravidade de qualquer cone é [o ponto que divide seu eixo de tal forma que] a parte [adjacente ao vértice é o] triplo [da parte adjacente à base]," (*O Método*), [Arc02, Suplemento, pág. 15]. Na versão em francês: "Em todo cone o centro de gravidade está situado sobre o eixo, em um ponto que divide o eixo de maneira que o segmento situado do lado do vértice é o triplo do segmento restante," [Mug71b, pág. 85]. Em Heath este é o Lema 8, enquanto que em Mugler este é o Lema 10.

K) "Seja AN o eixo do segmento do parabolóide [de revolução] (...) Seja C o centro de gravidade do parabolóide BAB' (...) Então, como $AN = (3/2)AC$ (...)," (*Sobre os Corpos Flutuantes*, Livro II, Proposição 2), [Arc02, págs. 264-5]. "O centro de gravidade de um segmento de um parabolóide de revolução cortado por um plano perpendicular ao eixo está sobre a linha reta que é o eixo do segmento, e divide esta linha reta de tal maneira que a parte adjacente ao vértice é o dobro da parte restante," (*O Método*, Proposição 5), [Arc02, Suplemento, pág. 25]. Ver também [Dijkstherhuis, 1987, pág. 326]. Isto é, se o parabolóide de revolução tem um eixo de simetria AN, com A sendo o vértice e N o ponto médio da base, e se C é seu centro de gravidade, então $AC = 2CN$. Ou então, $AN/AC = 3/2$.

L) "O centro de gravidade de qualquer hemisfério [está sobre a linha reta que] é seu eixo, e divide esta linha reta de tal maneira que a parte adjacente à superfície do hemisfério tem para a parte restante a mesma razão que 5 tem para 3," (*O Método*, Proposição 6), [Arc02, Suplemento, pág. 27]. Isto é, se o hemisfério tem raio R e sua face plana está no plano xy, centrado na origem,

o centro de gravidade vai estar sobre o eixo z (eixo de simetria) localizado em $z_{CG} = 3R/8$.

M) "O centro de gravidade de qualquer segmento de uma esfera está sobre a linha reta que é o eixo do segmento, e divide esta linha reta de tal maneira que a parte da linha adjacente ao vértice do segmento tem para a parte restante da linha a mesma razão que a soma do eixo do segmento e quatro vezes o eixo do segmento complementar tem para a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo do segmento complementar," (*O Método*, Proposição 9), [Arc02, Suplemento, pág. 35].

N) Arquimedes obtém na Proposição 10 de *O Método* o centro de gravidade de qualquer segmento de um elipsóide.

O) Arquimedes obtém na Proposição 11 de *O Método* o centro de gravidade de qualquer segmento de um hiperbolóide de revolução.

A única coisa ainda a ser ressaltada é que estes resultados foram obtidos teoricamente por Arquimedes, a partir dos postulados que estabeleceu. Isto é, foram derivados matematicamente. Na parte anterior deste livro vimos como obter alguns destes resultados (como o CG de um círculo, retângulo ou triângulo) experimentalmente. No final deste livro veremos como Arquimedes calculou alguns destes centros de gravidade, assim como a definição matemática moderna do CG.

Parte III

Balanças, Alavancas e a Primeira Lei da Mecânica

Até o momento chegamos ao conceito do centro de gravidade, CG, definido da seguinte maneira: O centro de gravidade de qualquer corpo rígido é um ponto, pertencente ao corpo ou localizado no espaço vazio, tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, tendo liberdade para girar em todos os sentidos ao redor deste ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra. Chegamos também a um procedimento prático para encontrá-lo: O centro de gravidade de um corpo é o ponto de encontro de todas as verticais passando pelos pontos de suspensão do corpo quando ele está parado em equilíbrio e tem liberdade para girar ao redor destes pontos. Embutidos nesta definição e neste procedimento prático estão diversos resultados experimentais. Mas esta definição $CG8$ e os procedimentos práticos $CG6$ e $CG7$ não nos permitem calcular teoricamente o CG de nenhuma distribuição discreta ou contínua de corpos. Deve ser enfatizado ainda que nesta definição e no procedimento prático para encontrar o CG não foi necessário introduzir o conceito de peso, nem de quantificar esta grandeza.

Já vimos nas experiências de equilíbrio com um triângulo, assim como na análise geométrica posterior, que nem todas as retas que passam pelo CG de uma figura plana homogênea a dividem em duas áreas iguais. Nas experiências com o boneco equilibrista vimos também que alterando a colocação da massa de modelar conseguimos alterar a posição do CG do boneco com as massas. Isto nos sugere que o CG tem a ver não apenas com o peso do corpo ou de suas partes, mas também com a maneira pela qual estes pesos estão distribuídos pelo corpo.

Vamos ver aqui como chegar a uma expressão matemática com a qual se pode calcular teoricamente o CG de diversas distribuições de matéria. Para isto vamos precisar inicialmente quantificar o conceito intuitivo de peso. Isto é, encontrar de uma maneira objetiva e quantitativa quanto vale o peso de um corpo. Este é o tema principal do próximo Capítulo.

Capítulo 7

Balanças e a Medida do Peso

7.1 Construção de uma Balança

Os conceitos quantitativos mais básicos que temos na física são os de tamanho de um corpo (ou de distância entre corpos), tempo entre eventos físicos e peso de algum objeto.

Para medir o tamanho de um corpo ou a distância entre dois corpos usamos essencialmente um padrão rígido de comprimento. Por definição dizemos que dois corpos têm o mesmo tamanho quando suas extremidades coincidem. Por exemplo, dizemos que duas pessoas possuem a mesma altura se, ao serem colocadas de costas uma junto à outra, as extremidades de seus pés e de suas cabeças coincidem. Por definição dizemos ainda que um corpo A tem N vezes o tamanho de um outro corpo B quando for possível sobrepor em seqüência linear N vezes o corpo A entre as extremidades do corpo B. O exemplo mais simples disto é uma régua de 1 metro graduada em unidades de centímetro. Ou seja, vemos que a régua possui 100 unidades de 1 cm entre suas extremidades, sendo esta a graduação marcada na régua retilínea. Utilizando uma régua rígida graduada podemos também medir o comprimento de algum corpo, ou a distância entre corpos pequenos etc.

Tempo é um conceito criado para se medir as variações observadas na natureza (por exemplo, para medir a alteração na disposição relativa entre alguns corpos). Qualquer padrão que se repita periodicamente pode ser utilizado para a medida do tempo. Historicamente o relógio mais importante e preciso usado na astronomia era a rotação da Terra em relação ao pano de fundo do conjunto de estrelas visíveis a olho nu, chamadas de estrelas fixas. Isto permite que se defina a unidade de dia sideral. Outros relógios astronômicos são dados pela rotação da Terra em relação ao Sol, dando a unidade de dia solar, as fases da Lua, e a variação da posição do nascer do Sol em relação às montanhas e outros corpos terrestres, dando a unidade de ano solar. Existem relógios com precisões as mais variadas, desde a observação de claridade e escuridão, passando pelas fases da Lua, até as sombras de um gnômon. Um gnômon é uma haste vertical

que marca a altura do Sol no céu através da posição e tamanho de sua sombra, sendo a base de construção dos relógios solares. Relógios de água, mecânicos (baseados em pêndulos ou molas), eletromagnéticos e utilizando diversos outros fenômenos periódicos vêm sendo usados ao longo dos séculos.

Mas o principal conceito que queremos analisar com mais detalhes aqui é o de peso de um corpo. Todos nós possuímos uma noção intuitiva do peso de um corpo como sendo uma medida quantitativa da força gravitacional. Dizemos que um corpo A é mais pesado do que um corpo B quando é mais difícil manter com nossas mãos o corpo A em uma certa altura do solo do que manter B à mesma altura. Esta dificuldade pode ser indicada pelo nosso suor ou pelo cansaço que sentimos no braço esticado. Também dizemos que A é mais pesado do que B quando tivermos de fazer um esforço físico maior para subir A de uma altura h do que para subir B da mesma altura. Esta noção sensorial subjetiva pode também ser indicada por alguns fenômenos que ocorrem com corpos materiais. Por exemplo, na deformação que o corpo A exerce sobre um suporte material que o apóia, deixando-o parado em equilíbrio a uma certa altura da Terra. Vamos supor que este suporte seja uma mola. Podemos dizer que um corpo A é mais pesado do que um corpo B quando a mesma mola sofre uma deformação maior apoiando o corpo A do que apoiando o corpo B. Neste caso estaríamos usando um corpo flexível ou deformável como uma mola para ser o indicador do peso. É melhor utilizar algum aspecto objetivo como a deformação da mola para quantificar a noção de peso do que o aspecto subjetivo que sentimos ao utilizar nossas mãos e braços.

Mas historicamente o instrumento mais antigo e importante utilizado para quantificar a noção de peso foi a balança de braços iguais. Balança é o nome que se dá a qualquer instrumento que determina de maneira quantitativa o peso dos corpos. A balança de braços iguais já era conhecida desde o Egito antigo, pelo menos. Na Figura 7.1 vemos pinturas da época dos faraós mostrando a utilização destas balanças ao redor de 1.500 a.C.. É interessante que em algumas destas pinturas aparecem pessoas com um fio de prumo para determinar quando o travessão da balança está horizontal.

De acordo com Steve Hutcheon (comunicação particular que obteve de Thomson, [tho]), o registro mais antigo de uma balança na astronomia é de cerca de 1.350 a.C. quando os Acadianos da Mesopotâmia chamaram um grupo de estrelas de Zibanitum (a balança). Estas estrelas mais tarde tornaram-se conhecidas como a constelação Libra do zodíaco. Naquela época o grupo Zibanitum dava a localização do nascimento do Sol no Equinócio de Outono quando os intervalos de tempo do dia e da noite, e as estações, estavam em equilíbrio ou tinham o mesmo valor.

Os elementos principais de uma balança de braços iguais são: (A) uma haste homogênea rígida (também chamada de travessão) que é livre para girar ao redor de um eixo horizontal perpendicular ao travessão que está a distâncias iguais das extremidades da haste (este eixo é chamado algumas vezes de fulcro da balança), (B) um suporte rígido que mantém o fulcro da balança parado em relação à superfície da Terra, e (C) dois pratos da balança, dependurados a distâncias iguais do plano vertical passando pelo fulcro, ver a Figura 7.2. Nestes

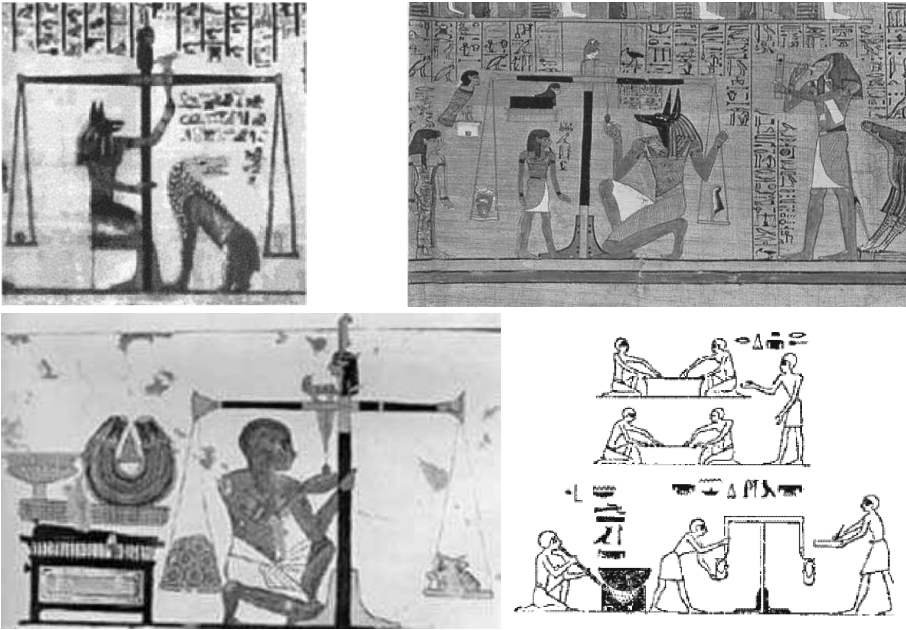



Figura 7.1: Algumas balanças do Egito antigo.

pratos vão ser colocados os corpos a serem pesados. O fulcro pode ser uma parte do suporte, tal como uma agulha horizontal presa ao suporte, com o travessão dependurado pela agulha. Ou o fulcro pode ser uma parte do travessão, tal como uma agulha horizontal presa ao travessão, com a agulha apoiada pelo suporte fixo em relação à Terra. Chamamos de braço da balança à distância horizontal, d, entre o ponto de apoio do prato no travessão e o plano vertical passando pelo fulcro da balança. Em algumas balanças que vamos construir a seguir não utilizaremos pratos pois os corpos a serem pesados serão dependurados diretamente no travessão da balança.

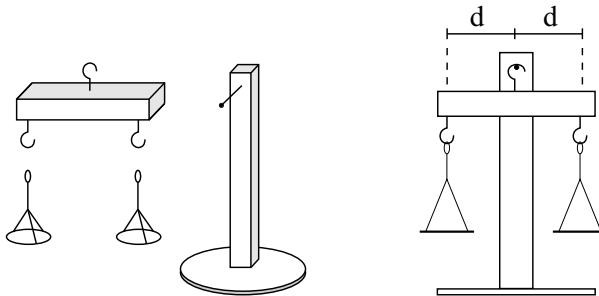



Figura 7.2: Componentes de uma balança.

Quando falamos da distância de um ponto Q a uma reta, deve-se entender que nos referimos à menor distância entre este ponto Q e um outro ponto qualquer da reta. Por exemplo, seja a reta o eixo x de um sistema de coordenadas cartesiano e o ponto Q localizado em $(x, y, z) = (0, 0, d)$. Então a distância de Q ao eixo x é, por definição, igual a d. O mesmo deve ser entendido quando falamos da distância de um ponto a um plano, isto é, como sendo a menor distância entre este ponto e um outro ponto qualquer do plano. Por exemplo, define-se que a distância entre o ponto Q localizado em $(x, y, z) = (0, 0, d)$ e o plano xy como sendo dada por d.

Antes de se colocar quaisquer corpos a serem pesados, a balança deve ser ajustada para que seu travessão fique na horizontal sem a colocação dos pratos. Isto pode ser feito, caso necessário, alterando a colocação do fulcro no travessão ou o comprimento da haste de cada lado do travessão. Além disso, o travessão deve continuar horizontal quando são colocados os pratos. Caso necessário, isto também pode ser feito alterando a posição exata do prego onde são dependurados os pratos. Caso a balança ainda continue desequilibrada sem a colocação de quaisquer corpos a serem pesados, consegue-se às vezes equilibrá-la colocando-se um pequeno contrapeso em alguma posição de um dos lados do travessão. Este contrapeso pode ser um pequeno pedaço de barbante, de arame ou de massa de modelar.

Já vimos que por definição a reta chamada de vertical é a indicada pela direção de queda livre de um pequeno corpo solto do repouso perto da superfície da Terra, que coincide com a direção apontada por um fio de prumo em equilíbrio. Horizontal é qualquer reta perpendicular à vertical. Definimos também o equilíbrio de um corpo como sendo a situação em que ele e todas as suas partes ficam paradas em relação à Terra.

Definição de balança em equilíbrio: Apesar disto, vamos definir agora o significado da expressão "balança em equilíbrio" como sendo apenas a situação em que seus braços ficam parados na horizontal. Este é o significado dado pela maioria das pessoas ao equilíbrio das balanças e vamos adotá-lo aqui. Ou seja, mesmo que o travessão e os pratos estejam parados em relação à Terra, não diremos que a balança está em equilíbrio caso o travessão esteja inclinado em relação à horizontal.

Antes de utilizar a balança para medir pesos, é necessário construí-la e deixá-la em equilíbrio na horizontal sem a colocação de quaisquer corpos adicionais que serão pesados, apenas com seus braços e pratos. É também importante verificar que os fios prendendo os pratos aos braços da balança estejam colocados à mesma distância do plano vertical passando pelo fulcro. Para que a balança seja precisa, é fundamental que ela seja bem livre para girar ao redor do fulcro, sem ser impedida por atrito ou por estar muito presa neste ponto.

Já vimos anteriormente que um corpo rígido suspenso por um ponto fica em equilíbrio estável quando o ponto de suspensão PS está verticalmente acima do CG do corpo. Caso o CG esteja acima do ponto de apoio PA, o equilíbrio tende a ser instável, a menos que o PA deixe de ser um ponto e passe a ser uma área de apoio. Por hora vamos tratar apenas de balanças suspensas por um fulcro localizado verticalmente acima do CG da balança vazia. Em algumas figuras

representaremos este fulcro pelas letras PS. Um dos aspectos mais importantes na construção de uma balança é que o fulcro fique verticalmente acima do CG do travessão (sem a colocação dos pratos e dos pesos a serem medidos). É isto que vai dar um equilíbrio estável ao travessão e fazer com que ele volte à posição horizontal depois de solto do repouso a partir de qualquer inclinação inicial que o travessão possua em relação à direção horizontal.

A haste (ou travessão) da balança pode ser feita de qualquer material rígido como madeira, plástico, metal, ou mesmo de papel cartão. Mencionamos aqui hastes cilíndricas (palitos de churrasco ou cabos de vassoura), retangulares (retângulos recortados em papel cartão ou réguas) ou como paralelepípedos (ripa de madeira). Perto das pontas de seus braços, a distâncias iguais do plano vertical passando pelo fulcro, podem ser colocados dois pregos, dois alfinetes ou dois ganchos iguais, que vão suportar os pratos por suas cordas. Também podem ser feitos furos de mesmo tamanho perto das extremidades dos braços, por onde serão dependurados os pratos (por meio de ganchos ou anzóis). Os pratos das balanças podem ser duas tampas plásticas iguais de potes de margarina, dois copinhos plásticos iguais de café, ou quaisquer outros suportes adequados. Devem ser feitos três furos simétricos nas extremidades de cada uma das tampas ou copinhos. As linhas ou barbantes que vão prender cada tampa ou pote de um lado da balança devem ser feitos do mesmo material e ter o mesmo comprimento que as linhas ou barbantes que vão prender a outra tampa. Em vez de tampas ou copos, também é possível utilizar pequenos sacos de pano ou de plástico. Dentro deles serão colocados os corpos a serem pesados.

Vamos apresentar aqui diversos tipos de balanças de braços iguais precisas mas construídas com materiais de baixo custo. Além de ilustrar variedades diferentes, várias delas podem depois ser adaptadas como alavancas.

Existem várias possibilidades para que a balança tenha liberdade de girar ao redor do fulcro. Uma maneira é que haja um gancho na parte superior do travessão, acima de seu ponto médio. Outra possibilidade é que o travessão tenha um furo a meia distância entre suas extremidades, com o furo acima do CG do travessão. Nestes dois casos a balança será apoiada com um prego, alfinete ou palito de churrasco presos horizontalmente no suporte rígido e passando pelo gancho ou furo do travessão, como na Figura 7.2.

Uma das balanças mais simples que já temos praticamente pronta em casa é um cabide. O suporte horizontal por onde o gancho do cabide fica dependurado funciona como fulcro da balança e podemos dependurar os corpos a serem pesados no travessão do cabide, Figura 7.3.

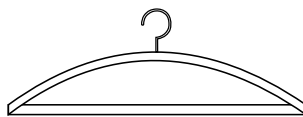



Figura 7.3: O cabide pode ser usado como uma balança.

Um modelo bem simples e instrutivo de balança que usaremos para algumas

atividades experimentais é feito com um T de papel cartão ou de cartolina, com vários furos ao longo do corpo e também com furos colocados simetricamente ao longo dos braços do T, como na Figura 7.4. Pelos procedimentos experimentais descritos no Capítulo 4 pode-se determinar facilmente o CG do T furado. O furo ao redor do qual o T vai girar, ou seja, por onde passará o fulcro da balança, deve ficar verticalmente acima do CG do T. Os pratos podem ser dependurados em quaisquer dois furos ao longo dos braços, desde que estejam a distâncias iguais da reta vertical que passa pelo eixo de simetria do corpo do T.

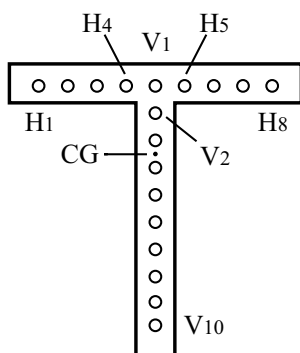



Figura 7.4: Uma balança de papel cartão.

Outra possibilidade de se gerar pouco atrito com a vibração da balança é utilizando uma haste horizontal presa no travessão, perpendicular a ele, apoiada nos dois lados por suportes lisos de mesma altura. Um exemplo é uma balança de rolha curta (ou rolha cortada ao meio em um plano paralelo às suas faces), agulha (ou palito de dente) e palito de churrasco. Inicialmente atravessa-se a rolha longitudinalmente com um prego, de preferência tal que ele fique paralelo ao eixo de simetria da rolha, mas fora dele. Vamos representar o eixo de simetria da rolha pela letra E. Tira-se o prego e atravessa-se a rolha por este buraco com um palito de churrasco. Pode-se então cortar a ponta do palito de churrasco para que ele fique simétrico dos dois lados. Em seguida atravessa-se a rolha com uma agulha (ou palito de dente), tal que a agulha fique perpendicular ao palito, perpendicular à reta passando pelo centro do palito e pelo centro da rolha, e paralela às faces da rolha. Vamos representar a agulha pela letra A. O centro da rolha tem de ficar entre o centro do palito de churrasco e o centro da agulha. O palito e o eixo da rolha ficam paralelos entre si, com a agulha perpendicular ao plano formado pelo eixo da rolha e pelo palito, como na Figura 7.5.

Apóiam-se os dois lados da agulha sobre o encosto de duas cadeiras, sobre duas latas de óleo ou sobre outro suporte apropriado. Ajusta-se a posição do centro do palito em relação ao centro da rolha até que o palito fique na horizontal. Em seguida fazem-se dois cortes na parte superior do palito de churrasco, perpendiculares a ele e igualmente distantes da agulha, onde serão apoiadas as linhas com os pratos da balança. Caso necessário, ajusta-se novamente a posição do centro do palito em relação ao centro da rolha tal que o travessão da balança

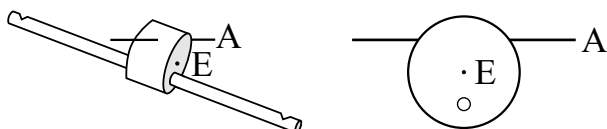



Figura 7.5: O travessão de uma balança. O travessão é feito com um palito de churrasco, uma rolha e uma agulha.

fique na horizontal, agora com os pratos em suas extremidades. O atrito da agulha girando sobre os suportes lisos é muito pequeno e esta balança permite uma boa precisão. A agulha funciona neste caso como o fulcro da balança, isto é, o eixo horizontal ao redor do qual ela pode girar, Figura 7.6.

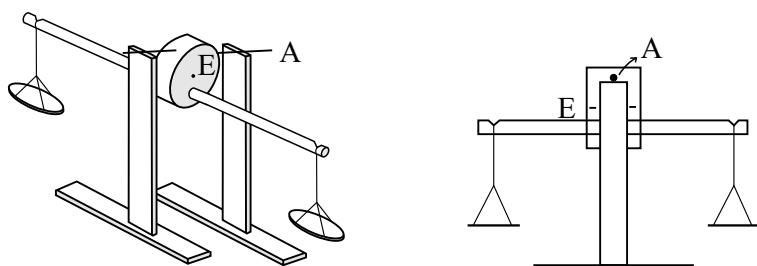



Figura 7.6: Uma balança completa em seu suporte.

Outra maneira que gera muito pouco atrito durante a oscilação da balança é que o travessão contenha alfinetes ou pregos na vertical apoiados sobre superfícies lisas. A Figura 7.7 ilustra a montagem de uma balança com rolha, palito de churrasco e alfinetes.

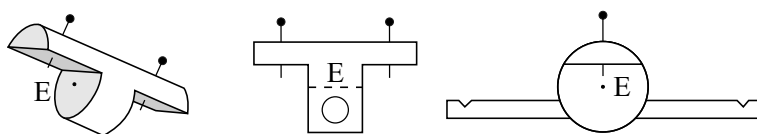



Figura 7.7: Um outro tipo de balança com atrito muito pequeno.

Inicialmente são cortados, com uma faca de serra, pedaços iguais das duas extremidades da rolha, cada um com 1/3 do comprimento da rolha e tal que se corte fora 3/4 da parte circular da rolha. Em seguida atravessa-se um palito de churrasco pela parte central inferior da rolha, em direção ortogonal ao seu eixo E, tal que o palito fique em um plano paralelo ao plano dos cortes longitudinais da rolha, mas abaixo do eixo. Pode-se então cortar sua ponta para que ele fique simétrico dos dois lados. Antes de passar o palito de madeira, é bom atravessar um prego de mesma espessura que o palito pelo local, pois isto já abre um pouco o caminho e facilita depois a passagem do palito. Colocam-se dois alfinetes tal

que suas pontas fiquem acima do eixo de simetria original da rolha. Ajusta-se o palito de churrasco até que ele fique na horizontal, com as pontas dos alfinetes apoiadas sobre o encosto de duas cadeiras, sobre as tampas de duas latas de óleo, ou sobre outro suporte apropriado. Para que a balança fique estável é crucial que as pontas das agulhas fiquem acima do CG do sistema composto de rolha cortada, alfinetes e palito. Pode-se fazer um pequeno corte perto de cada uma das pontas do travessão, perpendicular ao travessão e em seu lado superior, para que se prenda nestes cortes as linhas com os pratos, como na Figura 7.7c.

Existem vários outros modelos possíveis, mas os apresentados até aqui já dão uma boa idéia de como construir balanças sensíveis.

7.2 Medida do Peso

Apresentamos agora a maneira de utilizar a balança para se obter medidas de peso. Vamos supor então que já construímos nossa balança de braços iguais, que ela tenha total liberdade para girar ao redor do fulcro e que ela esteja equilibrada. Isto é, que o travessão da balança fique parado na horizontal quando ela é livre para girar ao redor do fulcro, com pratos dependurados a distâncias iguais do plano vertical passando pelo fulcro.

Experiência 7.1

Colocamos um corpo A (por exemplo, um clipe grande) no prato esquerdo da balança e uma seqüência de N corpos B diferentes (por exemplo, um clipe pequeno, um clipe grande, uma moeda, um pedaço de massa de modelar, ...) no prato direito da balança, tal que haja apenas um corpo B de cada vez neste prato, soltando a balança do repouso com seus braços na horizontal. Observamos que em alguns casos A sobe enquanto B aproxima-se da Terra, em outros casos os dois ficam parados com os braços da balança na horizontal, e em outras situações A desce enquanto B sobe.

Definição: Dizemos que dois corpos A e B possuem o mesmo peso P quando, ao colocar A sobre um dos pratos desta balança e B sobre o outro prato, soltando-a do repouso, ela permanece parada na horizontal, como na Figura 7.8.

Para que se tenha uma precisão melhor, é relevante que se inverta a posição dos corpos sobre os pratos da balança. Caso ela ainda continue em equilíbrio, pode-se afirmar que os dois corpos possuem realmente o mesmo peso. O motivo para esta precaução é que pode acontecer de um dos braços (vamos chamá-lo de braço 1) esteja a uma distância menor da vertical passando pelo fulcro do que o outro braço, o braço 2, sendo esta diferença entre as distâncias difícil de perceber a olho nu. Vamos supor que os braços tenham comprimentos diferentes. Caso o corpo A colocado no prato do braço 1 equilibre o corpo B colocado no prato do braço 2, isto vai deixar de ocorrer ao colocarmos A sobre o prato do braço

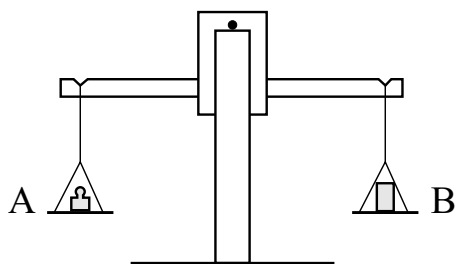



Figura 7.8: Uma balança em equilíbrio com pesos iguais.

2 e B sobre o prato do braço 1. O equilíbrio da balança só vai ocorrer nos dois casos (A sobre o braço 1 e B sobre o braço 2, assim como A sobre o braço 2 e B sobre o braço 1) se os dois braços estiverem realmente à mesma distância do plano vertical passando pelo fulcro. Esta inversão dos corpos em relação aos pratos deve ser verificada nos outros casos que lidam com balanças de braços iguais. Como não vamos mais mencionar este fato, vamos supô-lo implícito nas outras definições e procedimentos.

Embora se diga que o peso P é do corpo A (ou do corpo B), como se pertencesse a ele ou fosse uma propriedade do corpo A, na verdade ele vem de uma interação de A com a Terra (ou de B com a Terra), interação esta chamada de gravidade, que tende a unir os corpos A e B com a Terra. Logo, o mais correto seria definir que a interação atrativa de A com a Terra possui o mesmo valor P que a interação atrativa de B com a Terra se, ao colocar A sobre um dos pratos de uma balança de braços iguais e B sobre o outro prato, soltando a balança do repouso, ela permanecer parada na horizontal. De qualquer forma, vamos manter a denominação apresentada anteriormente por ser de uso comum. Mas não se deve esquecer este aspecto que estamos mencionando aqui.

Esta é uma definição operacional da igualdade de pesos e não uma lei experimental. Ou seja, utilizamos uma observação empírica para fazer uma definição conceitual.

Para que esta fosse uma lei experimental, já deveríamos ter antes uma definição para saber quando é que dois corpos possuem o mesmo peso. Se este fosse o caso, então poderíamos dizer que viria da experiência que dois corpos de mesmo peso se equilibram em uma balança de braços iguais. Mas como historicamente foi com a balança de braços iguais que se obteve a primeira maneira objetiva de se quantificar a noção de peso, esta igualdade tem de vir por definição. Só depois que já se tem esta primeira definição operacional é que se podem obter outros resultados experimentais a partir da igualdade de peso. Por exemplo, suponha que já se determinou pelo procedimento operacional apresentado anteriormente utilizando uma balança que dois corpos A e B possuem o mesmo peso. Com isto vem então o resultado empírico ou lei experimental de que dois corpos de pesos iguais deformam uma mesma mola de uma mesma quantidade ao serem apoiados separadamente sobre ela e mantidos em repouso em relação à Terra.

A definição anterior é a principal maneira operacional de se quantificar a igualdade de peso entre dois corpos. Poderia se pensar em uma definição alternativa, tal como: definimos que dois corpos feitos do mesmo material e tendo a mesma forma e o mesmo tamanho possuem o mesmo peso. Mas esta definição alternativa apresenta alguns problemas ou limitações por dois motivos. O primeiro é que é difícil saber se dois corpos são realmente feitos do mesmo material, já que podem existir diferenças microscópicas entre eles que surgem no processo de fabricação dos corpos, ou então diferenças internas difíceis de detectar (bolhas, impurezas, ...). E mesmo que se desprezasse este aspecto, surge um segundo problema ainda mais importante. Não existe a mínima possibilidade de se comparar o peso de dois materiais distintos com esta definição alternativa, tais como ferro e madeira, ou como milho e água. Ou seja, quando os corpos possuem natureza química diferente, não se pode saber com esta definição alternativa como comparar seus pesos.

Vamos ilustrar este ponto com um exemplo específico, já que é algo relevante pouco discutido nos livros. Ao comprarmos uma caixa de clipes percebemos visualmente que possuem a mesma forma e o mesmo tamanho. Como são feitos do mesmo material, é razoável supor que possuem o mesmo peso. Apesar disto, sempre existem variações microscópicas entre dois clipes, mesmo que estas variações sejam difíceis de perceber macroscopicamente. De qualquer forma, mesmo que se deixasse este aspecto de lado, não existe a mínima possibilidade de comparar visualmente o peso de um destes clipes com um certo pedaço de massa de modelar. Afinal de contas, o clipe e a massa possuem forma diferente, tamanho diferente, cor diferente e, principalmente, são feitos de substâncias químicas diferentes. A única maneira de saber se possuem ou não o mesmo peso é utilizando algum efeito mensurável que surge da atração gravitacional. O instrumento quantitativo que surgiu primeiro para determinar o peso foi a balança de braços iguais. Dizemos então, por definição, que um clipe e uma certa quantidade de massa de modelar vão possuir o mesmo peso se, ao serem colocados em repouso sobre os pratos desta balança, ela permanecer parada na horizontal.

Vemos então que a melhor maneira é definir a igualdade de pesos entre dois corpos A e B através de algum efeito gravitacional causado por estes corpos. Pode ser o equilíbrio da balança como apresentado anteriormente, ou então o fato de eles causarem a mesma deformação em uma certa mola, ou algum outro critério deste tipo. Como historicamente as molas surgiram milhares de anos depois da balança de braços iguais, vamos adotar a definição anterior baseada em um efeito empírico sobre a balança.

Em princípio esta definição só é estritamente válida quando a balança está cercada por um alto vácuo. O motivo para esta precaução é que se os corpos A e B estiverem imersos em um fluido como o ar, vai haver uma força para cima exercida sobre eles pelo ar, o empuxo. E esta força é igual ao peso do ar deslocado, como descoberto pelo próprio Arquimedes. Portanto, o corpo com volume maior receberá uma força maior do ar. Esta força do ar vai perturbar a comparação dos pesos de A e de B. Em nossa definição estamos desprezando o efeito desta força de empuxo, considerando apenas as forças para baixo exercidas sobre A e B devidas a suas interações com a Terra.

Definição: São dados dois corpos A e B colocados em pratos separados de uma balança de braços iguais, inicialmente na horizontal, sendo o sistema solto do repouso. Caso a balança não fique equilibrada mas se incline para um dos lados dizemos que é mais pesado (leve) o corpo que se aproximar (afastar) da Terra.

Experiência 7.2

Vamos agora colocar dois pratos com linhas bem compridas na balança, de mesmo peso, tal que o sistema fique em equilíbrio com o travessão na horizontal quando são colocados dois corpos de mesmo peso em seus pratos, como na Figura 7.9a. Depois disto encolhemos bastante uma das linhas, colocando o excesso que não está esticado dentro do prato a que pertence, e soltamos novamente o sistema com o travessão na horizontal. O que se observa é que a balança continua equilibrada, como na Figura 7.9b. Ou seja, experimentalmente vem que o peso de um corpo não depende de sua altura em relação à superfície da Terra.

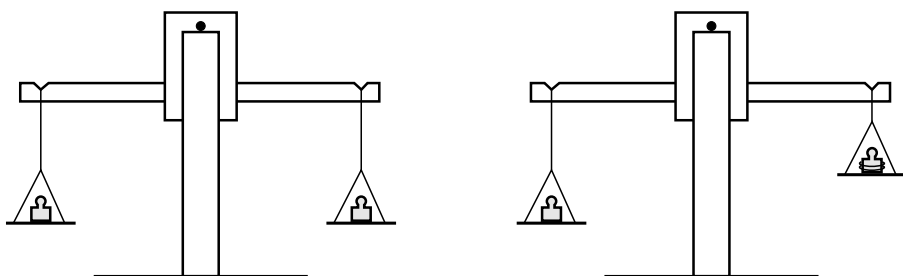



Figura 7.9: O peso não depende da altura do corpo. A parte encurtada da linha do prato da direita foi enrolada ao redor do peso sobre este prato.

Com a teoria da gravitação universal de Newton sabemos hoje em dia que este resultado é apenas uma aproximação, pois a força gravitacional entre dois corpos esféricos cai com o quadrado da distância entre seus centros. Mas devido ao raio imenso da Terra, comparado com a diferença de comprimento entre estes dois fios nesta experiência, a mudança de peso será desprezível. Isto é, ela não pode ser detectada com este tipo de experiência. Portanto, podemos assumir como um resultado experimental que o peso de um corpo na superfície da Terra não depende de sua altura até o solo.

Agora que já definimos a igualdade de peso entre dois corpos, podemos prosseguir quantificando a noção de peso com outra definição.

Definição: Definimos que N corpos de mesmo peso, colocados juntos, possuem N vezes o peso de um deles.

Por exemplo, suponhamos que com uma balança de braços iguais descobrimos que os corpos A, B, C e D possuem o mesmo peso P (isto é, $P_A = P_B = P_C = P_D \equiv P$). Caso coloquemos estes quatro corpos sobre um dos pratos da balança e verificarmos que eles equilibram juntos um outro corpo E colocado no outro prato da balança, diremos, por definição, que o peso de E é quatro vezes maior que o peso de A (isto é, $P_E \equiv 4P_A$).

Esta pode parecer uma definição trivial. Mas isto não é verdade. Para ver que esta definição não é trivial, podemos compará-la com o caso da temperatura de um corpo. Definimos que dois corpos estão à mesma temperatura T quando, ao serem colocados em contato, permanecem em equilíbrio térmico (isto é, quando suas variáveis macroscópicas, como a pressão ou o volume no caso de gases, não se alteram com a passagem do tempo). Mas se colocamos juntos N corpos de mesma temperatura T, o sistema ainda vai ter a mesma temperatura T, e não uma temperatura N vezes maior do que T. O mesmo ocorre com a densidade. Isto é, se colocamos juntos N corpos sólidos cúbicos homogêneos com a mesma densidade ρ, o sistema ainda vai ter a mesma densidade ρ, e não N vezes esta densidade.

Baseado nesta definição podemos preparar um conjunto de pesos padrão. Escolhemos como nosso padrão um corpo específico, por exemplo um clipe de papel. Definimos que ele tem peso 1. Com uma balança encontramos vários outros corpos (como pedaços de massa de modelar) que têm o mesmo peso. Colocamos então cinco destes pesos iguais em um lado de uma balança e colocamos no outro lado uma quantidade apropriada de massa de modelar que equilibra estes 5 corpos. Esta massa de modelar terá, por definição, peso 5. Podemos marcar este número na massa. Podemos encontrar desta maneira outros padrões de peso 10, 50 e 100, por exemplo. Suponha agora que queremos pesar uma maçã. A colocamos de um lado da balança e descobrimos quantas unidades temos de colocar do outro lado para equilibrá-la. Se forem necessárias 327 unidades, dizemos que o peso da maçã é de 327 clipes de papel, ou simplesmente 327 unidades.

Agora que já apresentamos as principais definições relacionadas à igualdade de peso entre dois corpos e que estes pesos seguem a propriedade aditiva, vamos ver algumas experiências que permitem melhorar a precisão das balanças.

7.3 Melhorando a Sensibilidade de uma Balança

Vamos fazer agora quatro experiências cujos resultados auxiliam na construção de balanças mais sensíveis, [Fer06]. Todas elas utilizam figuras de papel cartão na forma da letra T, como na Figura 7.10. Este T furado de papel cartão vai funcionar como sendo um modelo de balança. Seus braços de mesmo comprimento vão ser o travessão de uma balança de braços iguais. Vamos supor que ao dependurar o T pelo furo que está na junção dos braços, apoiando-o no alfinete horizontal preso ao suporte, os braços do T acabam ficando horizontais depois que ele pára de oscilar e atinge o repouso. Podemos também encontrar dois clipes, por exemplo, que mantenham o T em equilíbrio quando são colocados a

distâncias iguais do eixo de simetria do T. Isto é, a balança está sendo usada aqui essencialmente para determinar a igualdade entre os pesos de dois corpos A e B. Mas como ela deve ser construída para que sejamos capazes, por exemplo, de distinguir uma diferença de peso de 1% entre A e B? Estamos interessados aqui em indicar os aspectos que aumentam a sensibilidade de uma balança, no sentido de se mostrar facilmente que dois corpos A e B possuem pesos diferentes. Este é o objetivo das experiências descritas a seguir.

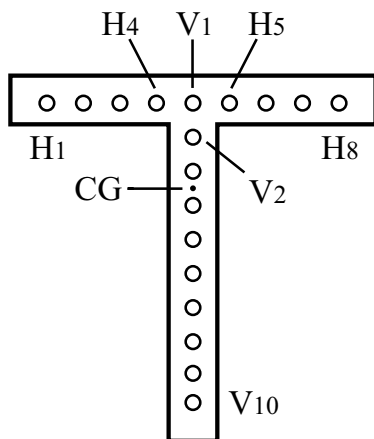



Figura 7.10: Um T de papel cartão funcionando como uma balança de braços iguais.

Diremos que quanto mais fácil pudermos distinguir que existe uma dada diferença entre os pesos A e B colocados nos dois lados da balança, mais sensível ela será. Esta sensibilidade da balança pode ser estabelecida quantitativamente pelo ângulo θ que seus braços fazem com a horizontal quando ela está desequilibrada (isto é, quando o peso de A é diferente do peso de B, estando eles colocados a distâncias iguais do fulcro). Quanto maior for θ, mais sensível será a balança.

Usaremos um clipe colocado sobre um de seus braços como sendo o fator que vai desequilibrar a balança. Queremos saber quais as condições que tornam mais visíveis este desequilíbrio, ou seja, que aumentam o ângulo indicado pelo T.

As dimensões do T não precisam ser exatamente as que vamos apresentar a seguir. Apresentamos as medidas do T que utilizamos apenas para dar um exemplo concreto. Uma possibilidade é que o comprimento entre a extremidade de um braço do T e a extremidade do outro braço seja de 15 cm. A altura do T pode ser de 16,5 cm. A largura dos braços e do corpo do T pode ser de 3 cm. São feitos furos separados de 1,5 cm ao longo da linha central dos braços e do corpo do T. São feitos 10 furos ao longo do eixo de simetria do T. Vamos chamá-los de V_1 a V_{10}, com o furo V_1 ficando na junção dos braços e o furo V_{10} na extremidade inferior do corpo do T. São feitos furos ao longo dos braços

do T, simetricamente colocados em relação ao eixo de simetria do T. Vamos chamá-los de H_1 a H_8, estando H_1 mais à esquerda na Figura 7.10 e H_8 mais à direita.

Depois que são feitos estes furos localiza-se o CG do T usando um procedimento experimental descrito no Capítulo 4. A maneira mais prática é ter um suporte rígido com um alfinete preso na horizontal em sua parte superior. Dependura-se o T no alfinete pelo furo H_1, dependurando-se no mesmo alfinete um fio de prumo. Aguarda-se que o T e o fio de prumo atinjam o equilíbrio. Traça-se no T uma vertical passando pelo alfinete, com o auxílio do fio de prumo. Repete-se o procedimento dependurando agora o T e o fio de prumo pelo furo H_8. O cruzamento das duas verticais dá a posição do CG do T. Com as dimensões dadas anteriormente ele vai estar entre os furos V_3 e V_4, como indicado na Figura 7.10.

Experiência 7.3

Inicialmente temos a balança equilibrada, com seus braços na horizontal, suspensa pelo furo V_1. Rompemos agora o equilíbrio colocando um pequeno pedaço de papel, de massa de modelar, ou um clipe na extremidade de um de seus braços. O sistema gira ao redor de V_1, oscila algumas vezes, até parar com o braço tendo o peso extra ficando mais baixo do que o outro braço. Vamos chamar de θ_1 ao ângulo entre a horizontal e o braço com o peso extra na situação em que o T já atingiu o repouso, ver a Figura 7.11. Repetimos a experiência dependurando agora o T pelo furo V_2. Inicialmente o T fica em equilíbrio com seus braços na horizontal. Rompemos novamente o equilibro colocando o mesmo peso extra no mesmo local anterior. Após o sistema atingir o repouso medimos o ângulo entre a horizontal e o braço com o peso, chamando-o de θ_2. Repetimos o mesmo procedimento com o T suspenso pelo furo V_3. Neste caso o ângulo após o sistema atingir o equilibro será θ_3. Observa-se experimentalmente que quanto mais próximos estão o ponto de suspensão (neste caso, o alfinete) e o CG do T, maior é o ângulo final em que o sistema desequilibrado atinge o repouso. Isto é, vem da experiência que $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, como na Figura 7.11.

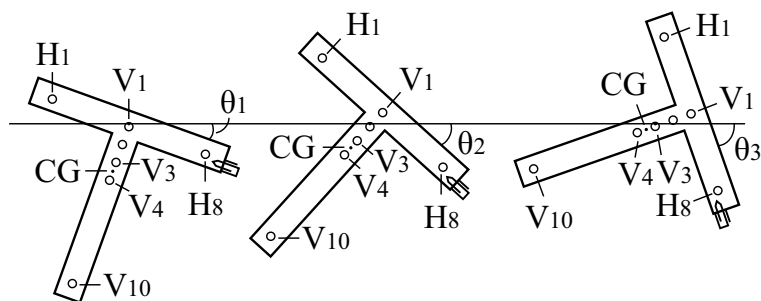



Figura 7.11: Quanto maior for a distância entre o ponto de suspensão PS e o CG, menor será a sensibilidade da balança.

Se tentarmos suspender o T em sua posição normal, isto é, com os braços acima do corpo, dependurando-o por furos que estejam abaixo do CG, não conseguimos. Isto é, se tentarmos dependurá-lo por V_4, V_5, ..., V_{10}, o sistema gira e só atinge o equilíbrio com os braços na horizontal ficando abaixo do corpo vertical do T, como vimos na Experiência 4.30. Mas mesmo nestes casos podemos romper o equilíbrio do mesmo jeito e verificaremos o mesmo resultado anterior. Isto é, se dependurarmos o T por V_{10} e colocarmos um peso extra na extremidade de um dos braços do T, o sistema vai atingir o repouso com este braço inclinado de θ_{10} em relação à horizontal, como na Figura 7.12. Se agora dependurarmos o T por V_9, ..., V_4, colocarmos o mesmo peso extra na extremidade do braço e aguardarmos o repouso, veremos que o braço vai ficar inclinado de, respectivamente, $\theta_{10} < \theta_9 < ... < \theta_4$.

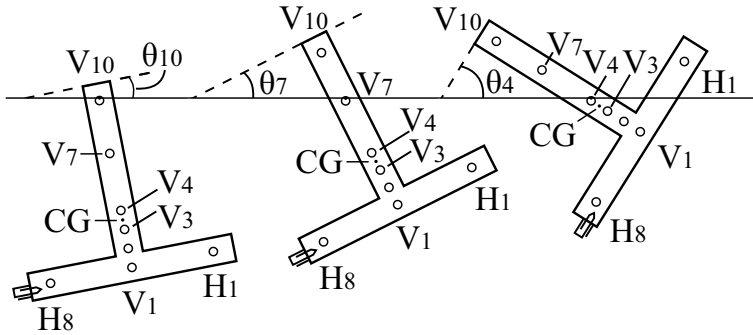



Figura 7.12: Obtém-se o mesmo resultado anterior com o T de cabeça para baixo.

Ou seja, em todos estes casos colocamos sempre o mesmo peso extra atuando à mesma distância do eixo vertical passando pelo fulcro da balança. E verificamos experimentalmente que quanto menor for a distância entre o PS e o CG da figura, maior é o ângulo de inclinação do travessão em relação à horizontal na posição em que o sistema fica em repouso. Portanto, quanto menor for esta distância entre o PS e o CG, maior é a sensibilidade da balança. Isto é, fica mais fácil de perceber que a balança está desequilibrada, suportando pesos diferentes em seus braços de mesmo comprimento.

Esta experiência sugere que sejam construídas balanças que permitam alterar a distância entre o PS e o CG, para com isto controlar sua sensibilidade. Um exemplo de balança deste tipo utiliza uma rolha, dois palitos de churrasco e dois alfinetes, Figura 7.13.

Inicialmente atravessa-se uma rolha com um palito perpendicular ao eixo da rolha, passando-o a uma distância de $1/3$ de uma de suas extremidades. Este primeiro palito será o travessão da balança, ficando horizontal no equilíbrio. Serra-se a ponta do palito e são feitos dois cortes na parte superior do palito, à mesma distância do centro do palito, para apoiar os fios presos aos pratos da balança. Depois se atravessa outro palito a uma distância de um terço da outra extremidade da rolha, tal que ele fique perpendicular ao eixo da rolha e

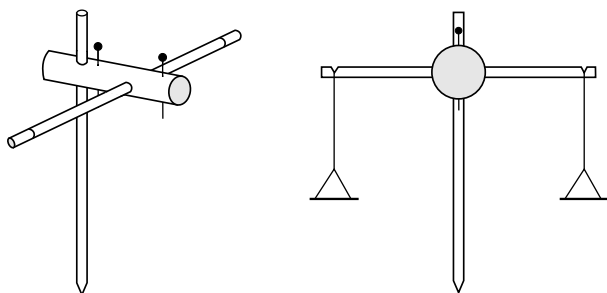



Figura 7.13: Uma balança com distância variável entre o PS e o CG.

ao primeiro palito. Este segundo palito vai ficar vertical no equilíbrio da balança, servindo também como ponteiro. É colocado então um alfinete paralelo a este segundo palito, passando perto do centro da rolha, que servirá de fulcro da balança. Para evitar que o travessão da balança tombe ao serem colocados os pratos e os pesos, levantando o ponteiro, deve-se colocar também um segundo alfinete paralelo ao primeiro alfinete, mas agora na parte dianteira da rolha, depois do palito horizontal. Ficaremos então na seqüência ao longo do comprimento da rolha, de trás para frente, com o ponteiro na vertical, um alfinete na vertical, o travessão na horizontal e, finalmente, mais um alfinete na vertical, como na Figura 7.13. Colocam-se os dois pratos da balança e ajustam-se seus braços tal que fiquem na horizontal quando a balança é apoiada pelos alfinetes. Depois se apóia a balança com os dois alfinetes sobre a parte superior de uma lata de óleo, por exemplo, ou sobre um palito de picolé preso à tampa de uma garrafa pet de 2 litros. Com isto está pronta a balança. Ao subir ou descer o palito vertical, alteramos a altura do CG da balança. Com isto alteramos sua sensibilidade de acordo com o desejado, já que desta maneira podemos controlar a distância entre o PS e o CG desta balança. O palito vertical também serve como ponteiro. Por exemplo, quando a balança está equilibrada com seus braços na horizontal podemos fazer uma marca na lata de óleo, ou seja, um pequeno risco vertical próximo à extremidade inferior do palito vertical, que indica o zero (0) da balança.

Existe uma outra idéia extremamente criativa de se ligar os dois palitos de churrasco (ou dois canudos de refresco) sem usar rolha. Para isto utiliza-se uma presilha de canudos de refresco (ou seja, uma presilha feita de pedaços de canudinho), [Fer06]. Inicialmente recortam-se três pedaços de canudo, um com 4 cm e dois com 5 cm de comprimento. Em seguida os pedaços maiores são dobrados ao meio e introduzidos no menor. O ângulo entre as duas voltas (ou entre os planos formados pelas dobras) deve ser de 90°, ver a Figura 7.14a.

Então são introduzidos nas dobras dois canudos inteiros, ou dois palitos de churrasco, e os dois alfinetes são espetados no canudo de 4 cm. Os dois canudos inteiros devem ficar ortogonais entre si, sendo um deles, que funcionará como ponteiro, paralelo aos dois alfinetes. Com isto é possível apoiar os dois alfinetes em um suporte fixo. O canudo horizontal fará o papel dos braços da balança.

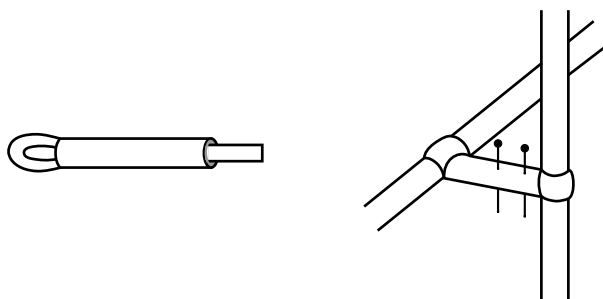



Figura 7.14: Uma balança com a presilha feita de canudinhos plásticos e tendo distância variável entre o PS e o CG.

Os braços devem ser ajustados até ficarem na horizontal e aí são marcados sobre eles dois pontos a distâncias iguais do centro, onde serão dependurados os pesos ou pratos da balança. O canudo vertical funciona como ponteiro e serve para alterar a distância entre o PS (ponta inferior dos alfinetes) e o CG do conjunto (composto de canudos, presilha e alfinetes), alterando assim a sensibilidade da balança. Para evitar que o travessão desta balança tombe ao serem colocados pesos sobre ele, levantando o ponteiro, os pesos devem ser leves, comparáveis ao peso total dos alfinetes mais os palitos e presilha. Caso se queira equilibrar corpos mais pesados, pode-se colocar pesos extras sobre o ponteiro para evitar que o travessão tombe para a frente.

Embora seja interessante aumentar a sensibilidade da balança, neste caso surge também um inconveniente. Se tirarmos a balança de sua posição de equilíbrio e a soltarmos, veremos que ela oscilará durante um tempo até parar devido ao atrito, voltando à posição de equilíbrio estável. Mas quanto menor for a distância entre o PS e o CG, maior será o período de oscilação. Ou seja, mais lenta será a oscilação, com a balança levando um tempo maior para completar cada volta. Logo, quando o PS está muito próximo do CG, tem que se aguardar um tempo muito longo (até ela parar de oscilar) para que se possa fazer uma leitura da balança. Isto inviabiliza algumas medidas já que pequenas perturbações são freqüentes (correntes de ar, trepidações da sala, perturbações ao colocar os pesos nos pratos da balança etc.). Uma técnica que se utiliza em algumas balanças é a de colocar um amortecedor (um ponteiro dentro de um recipiente de óleo, por exemplo) que diminui rapidamente as amplitudes das oscilações. Com isto pode-se aproximar o PS do CG, aumentando a sensibilidade da balança, sem que o tempo total até pararem as oscilações devidas a quaisquer perturbações fique muito grande.

Na próxima experiência veremos outro efeito que ajuda a aumentar a sensibilidade de uma balança.

Experiência 7.4

Nesta experiência vamos sempre manter o T suspenso pelo mesmo furo, por exemplo, por V_1. Vamos supor que ele fique com seus braços na horizontal, em

equilíbrio, quando suspenso por este ponto. Vamos agora romper o equilíbrio colocando um peso extra (um pedaço de papel, de massa de modelar, ou um clipe) sobre o furo H_8, soltando em seguida o sistema do repouso. O T oscila algumas vezes até parar com o furo H_8 abaixo do furo H_1. Vamos chamar de θ_8 ao ângulo que a horizontal faz com o braço na situação em que o T alcançou o repouso. Tiramos o peso extra e o T volta ao equilíbrio com seus braços na horizontal. Colocamos agora o mesmo peso extra sobre o furo H_7 e aguardamos que o sistema atinja o repouso. Chamamos de θ_7 ao ângulo entre o braço e a horizontal nesta situação. O procedimento pode ser repetido com H_6 e H_5. Experimentalmente vem que $\theta_8 > \theta_7 > \theta_6 > \theta_5$, como mostra a Figura 7.15.

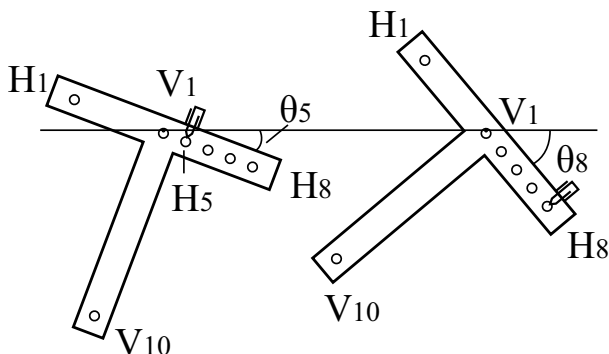



Figura 7.15: Quanto maiores forem os braços de uma balança, maior será sua sensibilidade.

Podemos imaginar que nestas quatro situações teríamos a mesma balança, mas com os pratos dependurados em braços iguais tendo comprimentos diferentes em cada ocasião (em H_1 e H_8 na primeira situação, ou então em H_2 e H_7 na segunda situação, ou então em H_3 e H_6 na terceira situação, ou ainda em H_4 e H_5 na quarta situação). Vemos então que quanto maior for o braço da balança, mais sensível ela fica. Isto é, para duas balanças iguais que possuem a mesma distância entre o PS e seu CG, é mais sensível aquela que possui braços maiores. Afinal de contas, quanto maior for o braço no qual houver um mesmo peso extra, mais visível será o desequilíbrio da balança, indicado por uma inclinação maior de seus braços em relação à horizontal.

Os resultados destas duas experiências podem ser combinados em uma única expressão. Seja h a distância vertical entre o PS e o CG do travessão. Seja d o braço da balança (distância horizontal entre o ponto de sustentação do peso e o plano vertical passando pelo fulcro). Quanto maior for a razão d/h, maior será a sensibilidade da balança. Isto é, maior será o ângulo de inclinação do travessão em relação à horizontal no caso de termos pesos diferentes nos dois braços iguais da balança.

Experiência 7.5

Um terceiro efeito que ilustra como aumentar a sensibilidade de uma balança

também é facilmente visível com o T de papel cartão. Neste caso recortamos três ou quatro figuras iguais, de mesmo tamanho e forma. Duas ou três delas são coladas uma sobre a outra, formando um T de mesmo tamanho que o T original, mas agora duas ou três vezes mais espesso que um T sozinho. Os dois sistemas, o T sozinho e o T espesso, são furadas nos mesmos lugares (V_1 a V_{10} e H_1 a H_8). Pode-se determinar experimentalmente o CG dos dois sistemas e ver que eles coincidem, isto é, estando entre os furos V_3 e V_4. Dependuramos então o T sozinho por V_1 e aguardamos até que os braços fiquem em repouso na horizontal. Depois disto suspendemos um peso extra (um pedaço de papel, de massa de modelar ou um clipe) na extremidade de um de seus braços. Aguardamos o sistema atingir o repouso, com o braço contendo o peso extra ficando abaixo do outro braço, e medimos o ângulo θ_S entre a horizontal e este braço. Retiramos este T do suporte e dependuramos agora o T espesso por V_1. Suspendemos o mesmo peso extra na extremidade de um de seus braços. Aguardamos o sistema atingir o repouso e medimos o ângulo θ_E entre a horizontal e este braço. Vemos experimentalmente que $\theta_S > \theta_E$. Isto é, quanto mais pesado for o travessão da balança em comparação com o peso extra, menos sensível ela será. Nesta experiência havia sempre a mesma distância entre o PS e o CG da balança, e o peso extra foi sempre colocado à mesma distância da vertical passando pelo fulcro. A diferença de sensibilidade é então devida apenas à diferença de peso entre as balanças. Concluímos então que quanto mais leve for uma balança, mais sensível ela será para distinguir uma mesma diferença de peso entre dois corpos, como ilustrado na Figura 7.16.

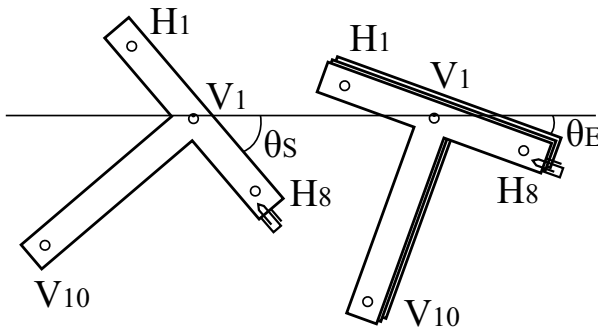



Figura 7.16: Quanto mais leve for uma balança, maior será sua sensibilidade.

Experiência 7.6

É também fácil observar experimentalmente que quanto maior for o peso extra colocado sobre um dos braços da balança, sempre à mesma distância do plano vertical passando pelo fulcro, mais ela se inclina em relação à horizontal. Isto é, colocamos um peso extra sobre um dos braços e verificarmos que a balança oscila até parar com este braço mais baixo que o outro. Seja θ_L o ângulo entre a horizontal e este braço. Agora colocamos mais um peso extra sobre o

mesmo braço, à mesma distância do fulcro. Soltamos a balança do repouso e esperamos ela parar de oscilar. Seja θ_P o novo ângulo entre a horizontal e este braço. Observa-se experimentalmente que $\theta_L < \theta_P$, como na Figura 7.17. Logo, quanto maior for a diferença de peso entre os dois lados da balança, mais fácil perceberemos isto.

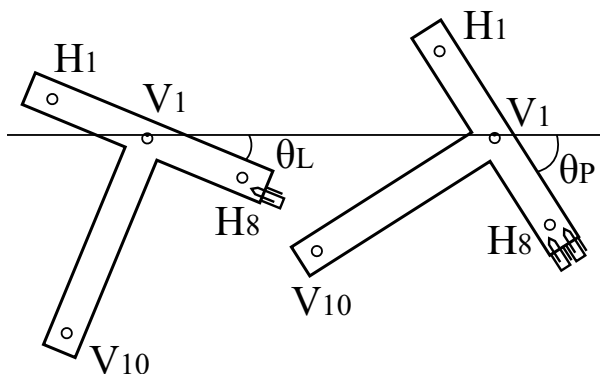



Figura 7.17: Quanto maior for a diferença de peso entre os dois corpos colocados em braços iguais, mais facilmente isto será percebido.

Novamente podemos combinar estas duas últimas experiências em uma única expressão. Seja $\triangle P \equiv |P_A - P_B|$ o módulo da diferença de peso entre os corpos A e B. Vamos representar o peso do travessão por P_{Tr}. Logo, quanto maior for a razão $\triangle P/P_{Tr}$, maior será a sensibilidade da balança. Isto é, maior será o ângulo θ de inclinação do travessão em relação à horizontal no caso em que $\triangle P$ for diferente de zero. Se $\triangle P$ for o mesmo em duas balanças diferentes, a que tiver menor peso de travessão será mais sensível.

7.4 Alguns Situações Especiais

7.4.1 Condição de Equilíbrio de um Corpo Suspenso

Antes de entrar no estudo das alavancas vale à pena fazer mais uma observação experimental. Vamos considerar a balança com palito, agulha (A) e rolha, na qual os eixos de simetria longitudinal destes três corpos estão na horizontal, Figura 7.18.

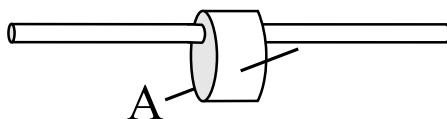



Figura 7.18: Um travessão com seu CG acima do fulcro, isto é, acima da agulha A.

Experiência 7.7

O equilíbrio da balança é estável quando a agulha está acima do centro da rolha e do centro do palito, com ou sem os pratos dependurados na balança, como é o caso das Figuras 7.5 e 7.6. Isto é, quando abaixamos um dos lados do palito e o soltamos do repouso, a balança oscila até parar com seus braços na horizontal e a agulha continuando acima do palito (supondo que existam pesos iguais em seus braços colocados a distâncias iguais da vertical passando pelo fulcro). É fácil de entender isto observando que na posição de equilíbrio o CG do sistema está na posição mais baixa possível, abaixo da agulha, ao longo da reta vertical passando pelo centro da agulha. Qualquer perturbação tende a subir o CG. Conseqüentemente, caso o sistema tenha liberdade de rotação ao ser solto do repouso, retornará à posição de equilíbrio estável.

Experiência 7.8

Vamos agora analisar o caso inverso em que o centro da agulha está abaixo do centro da rolha e do centro do palito. Inicialmente vamos supor que não existam pratos e pesos presos à balança, ver a Figura 7.18. Neste caso o equilíbrio é instável com o palito na horizontal. Isto é, não conseguimos manter a balança parada nesta situação, ela tende a girar para um lado ou para outro quando solta do repouso. Se a balança puder fazer um círculo completo, vai acabar parando na situação de equilíbrio estável da Experiência 7.7. Também é fácil de entender este fenômeno observando que na posição de equilíbrio instável o CG do sistema está na posição mais alta possível, acima da agulha, ao longo da reta vertical passando pelo centro da agulha. Qualquer perturbação no sistema tende a baixar seu CG. Logo, a balança continuará girando inicialmente neste sentido, caso solta do repouso, já que a tendência do CG é de cair aproximando-se da superfície da Terra.

Experiência 7.9

O caso mais curioso é quando o centro da agulha está na posição da Figura 7.18, abaixo do centro da rolha e do centro do palito, mas agora com pesos iguais M e N colocados nos braços de mesmo comprimento da balança. Vamos supor que a balança esteja inicialmente com o palito (travessão) na horizontal. Vamos supor ainda que o peso do conjunto composto pelas linhas, pelos dois pratos, assim como pelos corpos M e N colocados nos pratos (CG deste primeiro conjunto no ponto P) seja maior do que o peso do conjunto composto por rolha, agulha e palito (CG deste segundo conjunto no ponto T), tal que o CG dos dois conjuntos como um todo esteja abaixo da agulha A, sobre o ponto C, como na Figura 7.19a. Mesmo neste caso o sistema fica em equilíbrio instável nesta situação inicial. Ou seja, ao ser solto do repouso vai tender a girar para um lado ou para outro, com o travessão da balança saindo da posição horizontal inicial devido a qualquer perturbação no sistema.

Vamos tentar entender o que está acontecendo aqui. Vamos analisar o sistema na posição tal que o travessão girou de um ângulo θ em relação à horizontal,

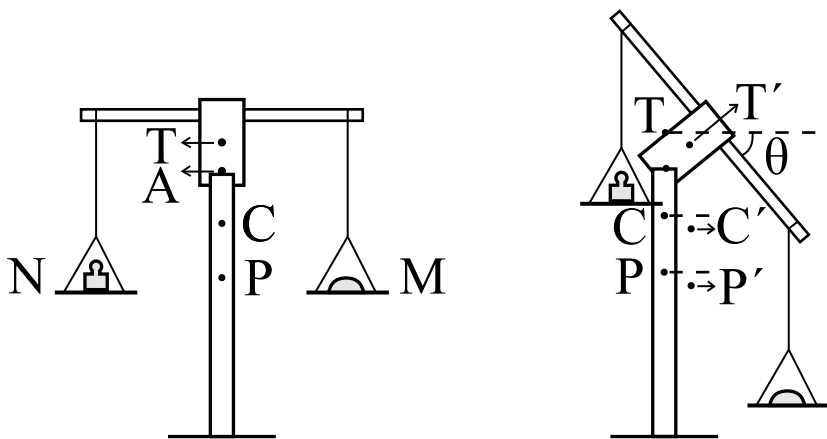



Figura 7.19: Uma balança em equilíbrio instável.

tal que o corpo M tenha descido e o corpo N tenha subido, Figura 7.19b. O corpo M (juntamente com seu prato e linha) desceu uma distância $H(\theta)$ em relação à sua altura original acima do solo. Durante o mesmo tempo o corpo N (juntamente com seu prato e linha) subiu uma distância $h(\theta)$ em relação à sua altura original acima do solo. Como o centro da rolha também desceu neste caso comparado com a altura original do centro da rolha, temos $H(\theta) > h(\theta)$. Isto significa que o CG do primeiro conjunto (corpos M e N, mais seus pratos e linhas) desceu de P e foi para P'. O CG do segundo conjunto (rolha, agulha e palito) também desceu e foi para a direita, saindo de T para o ponto T'. O CG dos dois conjuntos como um todo também desceu em relação à altura de C, indo agora para o ponto C'. Isto significa que a tendência do sistema será de aumentar o ângulo θ, já que isto abaixa o CG de todo o sistema, Figura 7.19b.

Caso o sistema tivesse girado em relação à horizontal de um ângulo θ em relação à horizontal de tal forma que N abaixasse e M subisse, mais uma vez o CG do conjunto como um todo também teria descido. E o sistema tenderia a aumentar ainda mais este ângulo θ. Isto explica o equilíbrio instável neste caso.

Estamos chamando a atenção para este caso pois ele apresenta algo novo. No caso do equilíbrio de corpos rígidos só havíamos conseguido equilíbrio instável com o CG acima do ponto de apoio PA (como na Figura 4.34, no caso de um corpo com perfil elíptico girando ao redor de um ponto de apoio abaixo de seu eixo maior na vertical). Isto ocorria quando qualquer perturbação na posição do corpo fazia com que seu CG se abaixasse em relação à posição de equilíbrio instável. Por outro lado havíamos visto equilíbrio estável com o CG acima do PA (como na Figura 4.33, no caso de um corpo com perfil elíptico girando ao redor de um ponto de apoio abaixo de seu eixo menor na vertical). Também havíamos visto equilíbrio estável com o CG abaixo do PS (figuras planas dependuradas por uma agulha passando por um de seus furos, como na Figura 4.25). Nestes dois últimos casos isto ocorria quando qualquer perturbação na posição

do corpo fazia com que o CG subisse em relação à sua posição na situação de equilíbrio estável.

No caso atual não temos mais um corpo rígido. Quando o travessão gira de um ângulo θ em relação à horizontal, muda o ângulo entre o travessão e as linhas que sustentam os pratos (ele deixa de ser um ângulo reto). Além disso, muda a distância entre o centro de qualquer prato e o centro do travessão. E agora estamos vendo um novo tipo de equilíbrio instável. Isto é, um caso em que o CG do sistema como um todo está abaixo do PS. Ou seja, estamos concluindo mais uma vez, mas agora em casos mais gerais, que vai ocorrer equilíbrio estável (instável) sempre que o CG do sistema como um todo subir (baixar) quando houver uma pequena perturbação na posição do sistema. O equilíbrio será indiferente caso o CG do sistema permaneça na mesma altura em relação à superfície da Terra quando houver alguma perturbação no sistema.

O ponto crucial para haver equilíbrio estável de uma balança livre para girar ao redor de um eixo horizontal é que o PS fique verticalmente acima do CG do travessão. Este é um ponto que já havíamos chamado a atenção anteriormente, mas é importante enfatizá-lo mais uma vez aqui. Por exemplo, se o travessão for uma ripa retangular ou um cabo cilíndrico, não se deve fazê-lo girar ao redor do centro da ripa ou do cilindro, mas sim ao redor de um eixo, o fulcro ou PS da balança, que fique acima do centro do travessão. Isto garantirá a estabilidade da balança quando colocada com o travessão na horizontal. Caso o furo tenha sido feito exatamente ao redor do centro da ripa, a alternativa para se conseguir um equilíbrio estável neste caso é a de colocar um peso extra fixo à parte central da ripa, mas abaixo do furo. Isto vai abaixar o CG do travessão, fazendo com que ele fique abaixo do furo (ou do PS).

7.4.2 Balanças com o Centro de Gravidade Acima do Fulcro

Antes de prosseguir vamos mencionar brevemente as balanças que possuem o CG do travessão acima do fulcro. Como há equilíbrio instável neste caso, a única possibilidade de se construir uma balança que funcione é que ela fique apoiada por uma área ou superfície, e não apenas por um único ponto ou por uma única linha horizontal sem espessura. Um exemplo é o de uma régua ou ripa horizontal apoiada no centro por uma peça de dominó, como na Figura 7.20. Ela só consegue ficar parada se a área superior do dominó em contato com a régua não for muito pequena comparada com a espessura da régua. Por exemplo, é extremamente difícil equilibrar a régua na horizontal apoiando-a no centro sobre a borda de uma lâmina de barbear colocada em um plano vertical. Neste caso a régua acaba tombando para um lado ou para outro mesmo antes da colocação de quaisquer pesos sobre seus braços.

Isto acaba limitando a precisão ou sensibilidade da balança, já que a área sobre a qual o travessão está apoiado não oferece uma distância única entre os pesos colocados em seus braços e a vertical passando pelo fulcro. Ou seja, a distância de cada braço ao plano vertical passando pelo fulcro estará entre um valor mínimo e um valor máximo. Isto permitirá que se equilibrem sobre

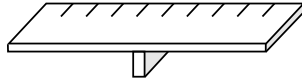



Figura 7.20: Uma balança com seu CG acima do fulcro.

esta balança não apenas corpos de mesmo peso, mas também alguns corpos de pesos diferentes (como estabelecido pelas balanças precisas anteriores, nas quais o fulcro estava acima do CG do travessão).

Outro problema destas balanças é que em geral os suportes (copinhos plásticos de café, tampas de garrafa pet etc.) para os pesos acabam sendo colados sobre a régua ou ripa horizontal. Com isto os pesos não vão ficar apoiados sobre um único ponto, mas sim espalhados sobre uma pequena região. Isto também inviabiliza ou dificulta a localização de uma distância única entre os braços (ou entre os pesos) e a vertical passando pelo fulcro.

7.4.3 Outros Tipos de Balança

Além da balança de braços iguais existem tipos variados que utilizam outros efeitos mensuráveis devidos à ação da gravidade. Uma balança caseira bem comum é a de molas, que utiliza a compressão de uma mola por um corpo apoiado sobre ela, parado em relação à Terra, como indicação de peso. Algumas balanças piezelétricas de alta precisão utilizam a piezeletricidade, que é um fenômeno observado em alguns cristais anisotrópicos nos quais deformações mecânicas (devidas ao peso de um corpo, no caso das balanças) provocam polarizações elétricas seguindo determinadas direções. Algumas balanças eletrônicas transformam deformações mecânicas, ocasionadas pelo peso dos corpos, em tensões elétricas, medidas eletronicamente. Existem diversos outros tipos, mas não entraremos em detalhes aqui.

7.5 Usando o Peso como Padrão de Força

É possível manter um travessão de uma balança de braços iguais na horizontal mantendo um corpo de peso P de um lado enquanto que do outro lado, à mesma distância do plano vertical passando pelo fulcro, um outro mecanismo equilibra a balança. Para simplificar a análise vamos supor que a balança não tenha pratos, tal que o peso P esteja colocado diretamente sobre o braço da balança. O mecanismo que contrabalança o peso P pode ser, por exemplo, o dedo de uma pessoa fazendo força para baixo. Pode também ser uma mola esticada presa ao solo abaixo da balança, ou um barbante esticado preso ao solo, Figura 7.21. Diversos outros mecanismos podem atuar sobre o outro lado da balança para equilibrar o peso do corpo (mecanismos que dependem de efeitos elétricos e magnéticos, por exemplo).

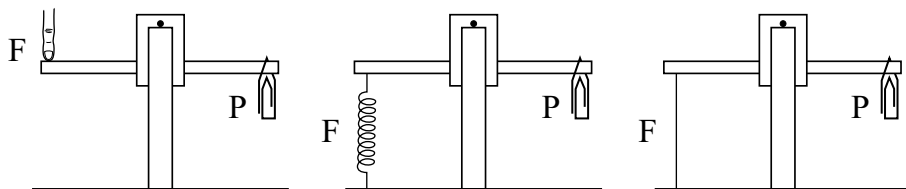



Figura 7.21: Utilizando o peso P como um padrão de força F.

Definição: Seja um corpo de peso P atuando à distância d do fulcro de uma balança de braços iguais, equilibrado por um sistema que atua do outro lado da balança à mesma distância d do fulcro. Definimos que o sistema exerce uma força de intensidade F igual ao peso P do corpo, qualquer que seja a natureza desta força (elástica, elétrica, magnética, etc.). Isto é, $F \equiv P$.

Ou seja, definimos nestes casos que o dedo (ou mola, ou barbante, ou ímã, ou ...) está exercendo uma força de intensidade F igual ao peso P do corpo. É desta maneira que inicialmente se pode calibrar ou medir forças de outra natureza, não necessariamente gravitacionais, comparando-as quantitativamente com a força peso. Estas forças de outra natureza podem ser, por exemplo, a força de contato exercida pelo dedo, a força elástica vindo da deformação de uma mola, a força magnética entre ímãs, a força elétrica entre cargas etc.

Este conceito não precisa ficar restrito a uma balança de braços iguais. Já vimos que se soltarmos uma moeda ou outro corpo a uma certa altura do solo, o corpo cai aproximando-se da Terra. Mas isto pode ser evitado de diversas maneiras. Por exemplo, colocando uma viga ou uma mola debaixo do corpo, dependurando-o por um fio ou por uma mola etc. A Figura 7.22 ilustra algumas possibilidades.

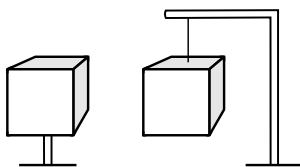



Figura 7.22: Maneiras variadas de equilibrar um peso.

Seja uma mola em repouso na vertical, presa apenas pela extremidade superior, tendo neste caso um comprimento L_0. Quando um corpo fica dependurado em repouso na parte inferior desta mola, observa-se que ela fica esticada com um comprimento $L_1 > L_0$, como na Figura 7.23. Outra possibilidade de deixar o corpo parado em relação à Terra é deixá-lo apoiado sobre a extremidade superior da mola, com a extremidade inferior da mola presa ao solo. Observa-se que neste caso a mola fica comprimida com um comprimento $L_2 < L_0$. Por definição dizemos que nestes casos a mola esticada ou comprimida exerce uma

força de intensidade F igual ao peso do corpo, $F \equiv P$. O mesmo pode ser dito se em vez da mola tivermos o corpo dependurado por um barbante, apoiado sobre uma viga, preso pelos dedos de uma pessoa, ...

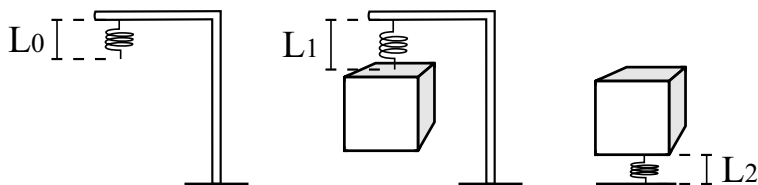



Figura 7.23: Uma mola esticada ou comprimida equilibrando um peso.

Já vimos que se o corpo A for solto do repouso no vazio, ele cairá aproximando-se da Terra. Pelas experiências anteriores vemos que podemos impedir esta queda ligando este corpo a uma balança de braços iguais e colocando um corpo B do outro lado da balança. Definimos que os dois corpos possuem o mesmo peso P quando o sistema fica em equilíbrio. Mas o corpo A não está ligado diretamente ao corpo B, estando em contato apenas com o prato da balança. Podemos então pensar que o peso atuando para baixo no corpo A, devido à gravidade terrestre e atuando como se estivesse concentrado sobre seu CG, é equilibrado por uma força normal de intensidade N exercida pelo prato sobre A, atuando para cima na região de contato entre o prato e o corpo A. Isto é, $N \equiv P$, como na Figura 7.24. Esta força normal tem sua origem no peso do corpo B atuando para baixo, sendo transmitida pelos fios esticados, pratos e travessão da balança ao corpo A. Os fios que seguram os pratos ficam tensos, sob tração, devido à atuação da gravidade sobre os corpos A e B. É esta tração elástica que se contrapõe ao peso dos corpos, mantendo-os em repouso em relação à Terra, apesar de a gravidade continuar atuando. Os pratos também ficam um pouco curvados, com os fios puxando-os para cima e o peso dos pratos e dos corpos A e B puxando-os para baixo.

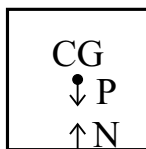



Figura 7.24: O peso P do corpo equilibrado pela força normal N exercida pelo prato da balança.

Podemos então dizer que a primeira condição de equilíbrio para que um corpo fique parado em relação à Terra, com a atuação da gravidade, é que o peso atuando para baixo sobre ele seja contrabalançado por uma outra força N atuando para cima, de intensidade igual ao peso.

Podemos também considerar o peso e as forças em geral como grandezas algébricas, isto é, positivas e negativas. Vamos tratar aqui de forças na direção

vertical e vamos escolher o sentido do peso como sendo positivo. Isto é, forças que atuam em direção à Terra serão consideradas como positivas e forças atuando para cima como negativas. Também pode se escolher, por exemplo, a direção Norte e a direção Leste como sendo positivas, com a direção Sul e a direção Oeste como sendo negativas. Postulamos então que um corpo está em equilíbrio quando é nula a somatória de forças atuando sobre ele, em qualquer direção. Caso esta somatória seja diferente de zero, postulamos que o corpo vai se mover na direção da força resultante.

Capítulo 8

A Lei da Alavanca

8.1 Construção e Calibração de Alavancas

A alavanca é uma das máquinas simples estudadas na Antiguidade grega. As outras máquinas simples são a polia (ou roldana), a cunha (ou plano inclinado), o sarilho (ou guincho, ou guindaste, ou roda e eixo) e o parafuso sem fim (ou hélice sem fim). A representação mais antiga que se conhece de uma polia é de 800 a.C., em um mural da Assíria, [Dow79, págs. 50-51]. A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra (o fulcro ou ponto de sustentação PS). O eixo de rotação é em geral ortogonal à alavanca, com os dois ficando usualmente no plano horizontal quando a alavanca está parada em relação à Terra. É como se fosse uma balança, mas agora com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro. Os modelos que vamos considerar aqui são análogos às balanças que já construímos. Vamos tratar de alavancas com equilíbrio estável nas quais o fulcro está verticalmente acima do CG da haste ou travessão, quando ela está parada na horizontal. Vamos ainda supor que a alavanca seja simétrica ao redor do plano vertical passando pelo fulcro, ficando com o travessão na horizontal quando em repouso sem a colocação de pesos. Assim como no caso da balança, diremos por definição que uma "alavanca está em equilíbrio" quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca à distância horizontal, d, entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro. Algumas vezes falamos apenas, por brevidade, da distância entre o peso e o fulcro, mas em geral deve-se entender que estamos nos referindo à distância horizontal entre o ponto de atuação do peso na alavanca e o plano vertical passando pelo fulcro. Se estivermos falando de dois braços da alavanca, deve ser entendido que eles estão de lados opostos do plano vertical passando pelo fulcro.

Para se chegar à lei da alavanca de maneira precisa e quantitativa é necessário que se tenha uma alavanca sensível. As condições para se chegar a isto são as mesmas da balança: liberdade de oscilação e de giro ao redor do fulcro; grande

razão $\triangle P/P_A$ (onde $\triangle P$ é a diferença entre os pesos que estão dos dois lados da alavanca, e P_A é o peso da alavanca); assim como grande razão d/h (onde h é a distância vertical entre o PS e CG do travessão, e a distância d é o menor dos braços da alavanca).

Além da alavanca ser sensível, deve-se marcar precisamente sobre os dois lados do travessão diversas distâncias iguais em relação à vertical passando pelo fulcro. Existem dois procedimentos principais para isto. (A) O primeiro é estabelecer o fulcro da alavanca (fazer o furo ou colocar o gancho por onde ela será dependurada; ou atravessar a agulha no travessão, sendo que esta agulha ficará apoiada sobre um suporte etc.). Feito isto, ajusta-se o travessão para que fique na horizontal sem a colocação de quaisquer pesos adicionais. Aí então são feitas as marcações sobre os dois lados do travessão, a distâncias iguais do plano vertical passando pelo fulcro. (B) O segundo procedimento é fazer inicialmente as marcações sobre o travessão (utilizando como travessão uma régua que já tenha uma escala marcada sobre ela; ou colar um papel quadriculado sobre uma ripa de madeira; ou marcar com uma régua pontos igualmente espaçados sobre uma ripa de madeira, cabo de vassoura ou palito de churrasco, prendendo em seguida pregos ou ganchos nestas marcações etc.). Depois da escala já estar estabelecida no travessão, coloca-se o fulcro sobre o plano de simetria que divide o travessão horizontal em duas partes iguais (em geral deslocado verticalmente do centro, para que o PS fique acima do CG do travessão). Deve ser verificado então se o travessão continua de fato na horizontal quando a alavanca é livre para girar ao redor do fulcro. Caso isto não ocorra, pode-se colocar algum peso extra (um arame, pedaço de linha ou massa de modelar) em algum lugar de um dos braços para deixar a alavanca na horizontal.

Nas Figuras 8.1 apresentamos diversas alavancas, análogas às balanças que já construímos.

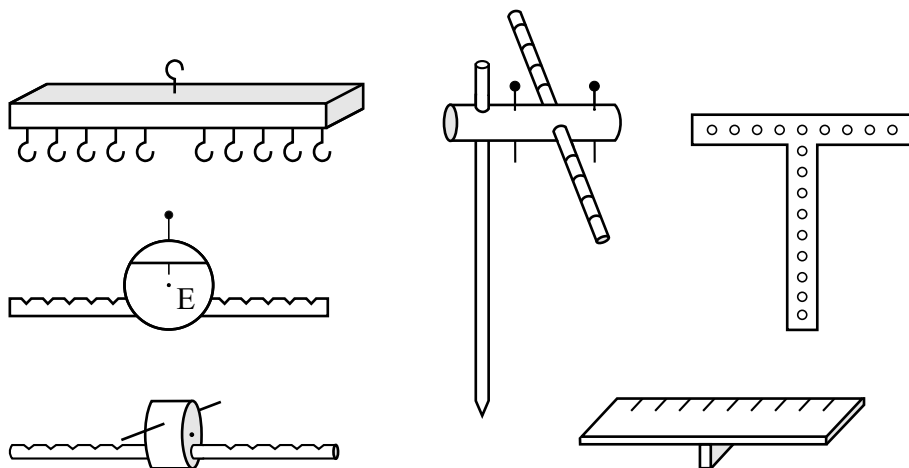



Figura 8.1: Exemplos de alavancas.

Antes de se começar as experiências com as alavancas deve-se testá-las para que estejam calibradas. Isto é, vamos supor que elas fiquem na horizontal sem a colocação de pesos adicionais. Agora colocamos dois pesos iguais ($P_A = P_B = P$) em braços iguais da alavanca ($d_A = d_B = d$) e ela deve permanecer equilibrada ao ser solta do repouso. Depois disto, assim como fizemos com as balanças, os pesos A e B devem ser invertidos de posição e a alavanca deve continuar equilibrada. Além do mais, este equilíbrio deve ocorrer em todas as marcações da alavanca (isto é, para todos os valores d). Daqui em diante vamos supor apenas a utilização de alavancas calibradas.

8.2 Experiências com Alavancas e a Primeira Lei da Mecânica

Podemos então começar as experiências.

Experiência 8.1

Colocamos um clipe à distância de 4 cm do plano vertical passando pelo fulcro e outro clipe de mesmo peso à distância de 4 cm do fulcro, no outro lado da alavanca. Observa-se que, ao soltarmos a alavanca da horizontal, ela permanece em equilíbrio. Agora mantemos um dos clipes à distância de 4 cm do fulcro e colocamos o outro clipe a 6 cm do fulcro, no outro lado da alavanca. Observa-se que, ao soltarmos a alavanca da horizontal, o clipe que está à maior distância do fulcro se aproxima da Terra, com o outro clipe afastando-se da Terra, Figura 8.2a.

O mesmo fenômeno ocorre em outras distâncias. Isto é, colocamos pesos iguais em braços de comprimentos diferentes da alavanca, $D > d$, e a soltamos do repouso, na horizontal. Observa-se que o peso que está no braço maior, D, aproxima-se da Terra, com o outro peso afastando-se dela, Figura 8.2b.

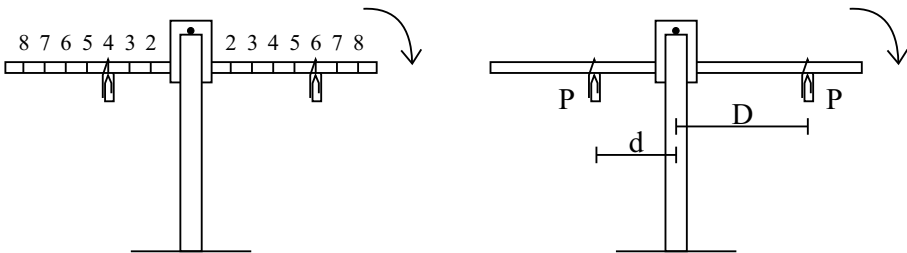



Figura 8.2: Um peso a uma distância maior do fulcro tem um poder maior de girar a alavanca do que um peso igual a uma distância menor do fulcro.

Esta experiência mostra que para existir o equilíbrio, não basta que existam pesos iguais dos dois lados da alavanca ao redor do fulcro. Ou seja, também é um fator relevante saber a que distância do plano vertical do fulcro está atuando o

peso de cada corpo. Apenas a experiência nos informa isto, este aspecto não vem da teoria. Isto é, experimentalmente vem que para o equilíbrio de dois corpos em uma alavanca não são relevantes a cor do objeto, seu formato, textura ou natureza química, mas sim seu peso e distância do fulcro.

Esta é uma das experiências mais simples e intrigantes da mecânica. Afinal de contas, existem pesos iguais nos dois braços da alavanca. Mas no que diz respeito à tendência de girar a alavanca, observa-se que o peso que está a uma distância maior do fulcro exerce um efeito maior do que o peso que está na distância menor. Embora este seja um fato corriqueiro observado a todo instante, não deixa de ser extremamente curioso.

Experiência 8.2

Colocamos 4 clipes de mesmo peso atuando a 6 cm do fulcro e equilibrando outros 4 clipes de mesmo peso atuando a 6 cm do outro lado do fulcro. O equilíbrio ainda se mantém se em um dos lados colocarmos 2 dos clipes atuando agora à distância de 4 cm do fulcro e os outros 2 clipes atuando à distância de 8 cm do fulcro, ver a Figura 8.3a. O equilíbrio ainda vai continuar colocando 1 dos clipes à distância de 3 cm do fulcro, outro à distância de 5 cm do fulcro, com os outros 2 clipes atuando à distância de 8 cm do fulcro, como na Figura 8.3b.

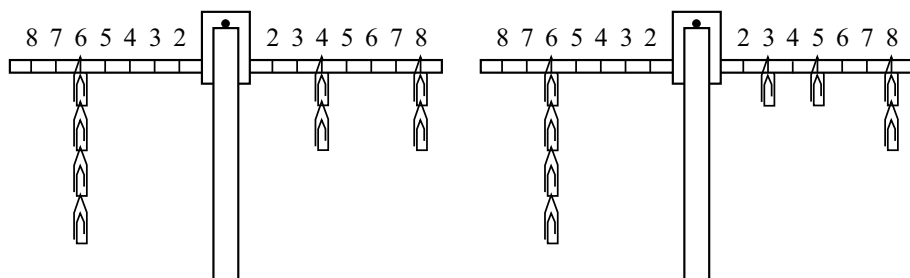



Figura 8.3: O equilíbrio de uma alavanca não é perturbado quando movemos um peso uma certa distância em direção ao fulcro e quando, simultaneamente, um outro peso igual desloca-se a mesma distância se afastando do fulcro.

Podemos generalizar isto da seguinte maneira. Colocamos N corpos de mesmo peso à mesma distância d do fulcro, assim como outros N corpos de mesmo peso à mesma distância d do outro lado do fulcro. A alavanca fica em equilíbrio. Observa-se experimentalmente que ela vai continuar em equilíbrio quando dividimos um dos grupos em duas ou três partes, deixando M corpos à distância d do fulcro (M podendo ser igual a zero), $(N-M)/2$ corpos à distância $d-x$ do fulcro e $(N-M)/2$ deles à distância $d+x$ do fulcro. O equilíbrio não vai ocorrer se colocarmos $(N-M)/2$ corpos à distância $d-x_1$ do fulcro e $(N-M)/2$ deles à distância $d+x_2$ do fulcro, com x_1 diferente de x_2. O equilíbrio ainda vai se manter se for possível dividir um ou mais destes grupos de $(N-M)/2$ corpos em duas ou três partes, mantendo Q deles à distância $d-x$ do fulcro,

enquanto que $((N-M)/2-Q)/2$ são mantidos à distância $(d-x)-y$ do fulcro e $((N-M)/2-Q)/2$ deles são mantidos à distância $(d-x)+y$ do fulcro. E assim sucessivamente. No exemplo anterior tínhamos $N=4$, $M=Q=0$, $d=6$ cm, $x=2$ cm e $y=1$ cm.

Esta experiência também não é trivial. Ela mostra que um peso P atuando à distância d do fulcro é equivalente a um peso $P/2$ atuando à distância $d-x$ do fulcro, juntamente com outro peso $P/2$ atuando à distância $d+x$ do fulcro. Isto é, estes dois pesos $P/2$ de um lado do fulcro também equilibram um peso P do outro lado do fulcro atuando à distância d, como fazia o peso P original. Esta experiência indica que, no que diz respeito à rotação da alavanca, os pesos atuam de maneira aditiva, seguindo ao princípio da superposição, com uma influência linear das distâncias em relação ao fulcro. Caso a influência das distâncias seguisse alguma outra função (quadrática, cúbica, inverso da distância, inverso do quadrado, senoidal, logarítmica etc.) não ocorreria a equivalência observada anteriormente. Novamente, este é um resultado experimental, nenhum argumento lógico obriga que a natureza se comporte assim.

Vamos analisar agora o equilíbrio de uma alavanca com pesos diferentes em seus braços.

Experiência 8.3

Pegamos 5 clipes de mesmo peso. Colocamos 2 destes clipes atuando à distância de 6 cm do plano vertical passando pelo fulcro. Colocamos os outros 3 clipes atuando à mesma distância de 6 cm do outro lado do plano vertical passando pelo fulcro, soltando a alavanca do repouso na horizontal. Observa-se que ela gira, com os 3 clipes aproximando-se da Terra e os 2 clipes afastando-se da Terra, Figura 8.4a.

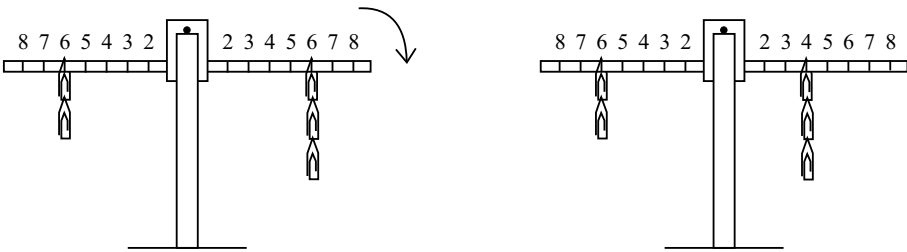



Figura 8.4: Equilíbrio de pesos diferentes.

Ou seja, suponha que temos N corpos de peso P atuando à distância d de um lado do plano vertical passando pelo fulcro de uma alavanca e M corpos de peso P atuando à mesma distância do outro lado da alavanca, com $M > N$. Se soltarmos a alavanca do repouso na horizontal, ela vai girar, com o conjunto de M corpos aproximando-se da Terra e com o conjunto de N corpos afastando-se dela. Pela definição anterior de nomenclatura dada na Seção 7.2, vem que o conjunto de M corpos é mais pesado que o conjunto de N corpos.

Agora vem uma das experiências mais importantes de todo este assunto.

Experiência 8.4

Pegamos 5 clipes de mesmo peso. Colocamos 2 clipes atuando à mesma distância de 6 cm do plano vertical passando pelo fulcro e procuramos a que distância do outro lado da alavanca devem atuar juntos os outros 3 clipes para deixar a alavanca em equilíbrio na horizontal. Observa-se que isto só ocorre quando eles atuam à distância de 4 cm do plano vertical passando pelo fulcro, ver a Figura 8.4b.

Se colocarmos os 2 clipes atuando à mesma distância de 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm e 8 cm do plano vertical passando pelo fulcro, observaremos que para a alavanca ficar em equilíbrio os outros 3 clipes devem atuar juntos à mesma distância do fulcro de, respectivamente, $4/3$ cm $\approx$ 1,3 cm, 2 cm, $8/3$ cm $\approx$ 2,7 cm, $10/3$ cm $\approx$ 3,3 cm, 4 cm, $14/3$ cm $\approx$ 4,7 cm e $16/3$ cm $\approx$ 5,3 cm.

O resultado desta experiência específica também se verifica em outros casos. Colocam-se um número N_A de corpos mesmo peso P (isto é, $P_A \equiv N_A P$) atuando juntos no braço d_A de uma alavanca e um número N_B de corpos de mesmo peso P (isto é, $P_B \equiv N_B P$) atuando juntos no braço d_B do outro lado da alavanca, soltando-a do repouso na horizontal. Observa-se experimentalmente que ela só permanece parada na horizontal caso

$$\frac{d_B}{d_A} = \frac{P_A}{P_B} = \frac{N_A}{N_B} \ . \tag{8.1}$$

Esta é a parte inicial da lei da alavanca. Arquimedes expressou-a com as seguintes palavras na Proposição 6 de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*:

> "Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos," [Dij87, pág. 289].

Por "grandezas" pode-se entender que Arquimedes estivesse se referindo a corpos físicos. A idéia de comensurar é a de medir por comparação. Isto é, medir duas ou mais grandezas com a mesma unidade ou padrão de medida. Caso o peso de um corpo A seja 5 vezes o peso de um corpo C, e o peso de um corpo B seja 3 vezes o peso do mesmo corpo C, diz-se que A e B são comensuráveis. Neste exemplo pode-se então dizer que o peso de A está para o peso de B assim como 5 está para 3. O corpo C seria então a unidade ou padrão de medida com o qual se pode medir não apenas o peso de A mas também o peso de B. Por outro lado, caso não exista nenhum corpo C tal que o peso de A seja um múltiplo do peso de C, e o peso de B seja um outro múltiplo do peso de C, então diz-se que A e C são incomensuráveis.

O exemplo mais famoso e comum de incomensurabilidade é o de segmentos. A diagonal de um quadrado, por exemplo, não é comensurável com o lado deste quadrado. Isto é, não é possível encontrar um terceiro segmento tal que a diagonal do quadrado seja um múltiplo deste terceiro segmento, e o lado do quadrado seja um outro múltiplo deste terceiro segmento.

Arquimedes generalizou este resultado para grandezas incomensuráveis na Proposição 7 de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*:

> "Da mesma maneira, mesmo se as grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas," [Dij87, pág. 305].

Na sua tradução para o inglês dos trabalhos de Arquimedes, Heath combinou estas duas proposições em uma única proposição, a saber:

> "Proposições 6, 7. Duas grandezas, sejam elas comensuráveis [Prop. 6] ou incomensuráveis [Prop. 7], se equilibram a distâncias inversamente proporcionais a suas grandezas," [Ass97] e [Arc02, pág. 192].

Esta é a lei mais antiga da mecânica, ou seja, da ciência que trata do equilíbrio e movimento dos corpos terrestres. Por este motivo é chamada algumas vezes de primeira lei da mecânica, [BRS03].

Como esta é uma das leis mais importantes de toda a mecânica clássica, vale à pena chamar a atenção para alguns erros experimentais comuns que inviabilizam a verificação deste resultado.

Vamos supor que a alavanca fique inicialmente em equilíbrio na horizontal sem a colocação de pratos ou dos corpos A e B. O erro mais freqüente é a colocação na alavanca do peso P_A em um prato à distância d_A do fulcro, e a colocação do peso P_B em um outro prato igual ao primeiro à distância d_B do fulcro, sem que existam outros pratos na alavanca. Neste caso, mesmo que $d_B/d_A = P_A/P_B$, a alavanca não fica em equilíbrio, mas o lado com o braço maior tomba em direção à Terra (se a alavanca for bem sensível e com atrito desprezível, totalmente livre para girar ao redor do fulcro), Figura 8.5a.

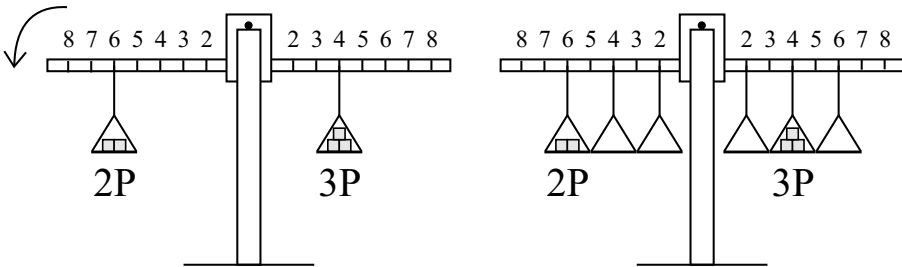



Figura 8.5: (a) Erro comum que inviabiliza a observação da lei da alavanca. (b) Como observar a lei da alavanca corretamente.

A explicação para este fenômeno está relacionada com a própria lei da alavanca. Embora os corpos A e de B estejam se equilibrando pois estão colocados a distâncias inversamente proporcionais a seus pesos, o mesmo já não ocorre com os dois pratos e as linhas que os prendem. Isto é, temos dois pratos de mesmo peso colocados a distâncias diferentes do fulcro. Pela Experiência 8.4 vem que estes pratos não se equilibram, mas fazem com que o braço mais distante da alavanca tombe em direção à Terra. Foi para evitar este erro comum que em todas as experiências descritas até agora não utilizamos pratos nas alavancas,

mas dependuramos os pesos diretamente nos travessões. No entanto, é possível a utilização de pratos em alavancas, desde que sejam em números iguais dos dois lados do fulcro, com cada par de pratos de pesos iguais colocados a distâncias iguais do fulcro. Por exemplo, se temos 6 pratos de mesmo peso, com 3 deles colocados nas distâncias de 2 cm, 4 cm e 6 cm de um lado, com os outros 3 colocados às mesmas distâncias do outro lado do fulcro, a alavanca fica em equilíbrio. Agora sim podemos colocar os corpos A e B nos braços da alavanca que ela vai continuar equilibrada caso $d_B/d_A = P_A/P_B$, Figura 8.5b.

Outro erro comum que ocorre mesmo sem a utilização de pratos é o seguinte. Suponha que uma alavanca fique equilibrada sem a colocação dos corpos A e B quando o plano vertical passando pelo fulcro divide o travessão homogêneo em duas partes iguais. Colocamos então dois corpos A e B de pesos diferentes nas extremidades do travessão e alteramos a colocação do fulcro tal que $d_B/d_A = P_A/P_B$. A alavanca também não fica equilibrada neste caso, mas o lado da alavanca que tem a maior haste tomba em direção à Terra, Figura 8.6.

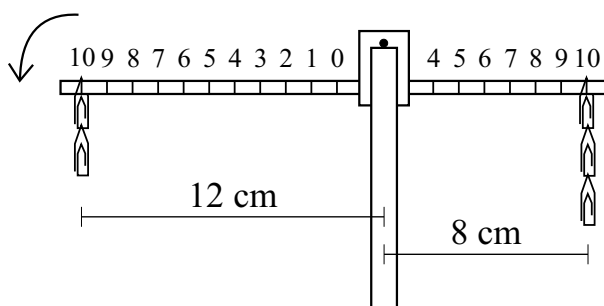



Figura 8.6: Esta não é a maneira correta de observar a lei da alavanca.

Novamente a explicação deste fenômeno está relacionada à própria lei da alavanca. Vamos supor que não existam pratos e que os corpos A e B são dependurados diretamente no travessão da alavanca. Embora eles satisfaçam à relação $d_B/d_A = P_A/P_B$ e, portanto, equilibrem a alavanca com o fulcro colocado na nova posição, o mesmo não ocorre com o travessão. Quando o fulcro estava sobre o plano que dividia o travessão em duas partes iguais, a alavanca ficava em equilíbrio sem a colocação dos corpos A e B. Ao alterarmos a posição do fulcro em relação ao centro do travessão, o travessão deixa de ficar em equilíbrio, independente da colocação dos corpos A e B. O lado com a haste mais comprida do travessão homogêneo tende a se aproximar da Terra, com o lado de haste mais curta se afastando dela. A colocação dos corpos A e B não altera esta falta de equilíbrio da alavanca com a nova posição do fulcro, mesmo que $d_B/d_A = P_A/P_B$. Para evitar este erro o procedimento correto é o de equilibrar o travessão sem a colocação dos corpos A e B, ajustando o fulcro tal que o travessão fique na horizontal parado em relação à Terra. Depois disto, sem alterar a posição do fulcro em relação ao travessão, colocam-se os corpos A e B. Agora sim vai ser verificado que eles manterão a alavanca em equilíbrio

caso $d_B/d_A = P_A/P_B$.

Estes dois erros estão relacionados com o fato de que os pratos da alavanca e o próprio travessão são corpos materiais que possuem peso. Logo eles também influenciam no equilíbrio da alavanca. Este aspecto não pode ser desprezado se estivermos trabalhando com alavancas sensíveis e se quisermos verificar de maneira quantitativa precisa as condições que estabelecem o equilíbrio.

Vamos agora supor que P_A/P_B seja diferente de d_B/d_A. Neste caso não vai haver equilíbrio caso a alavanca seja solta do repouso na horizontal e um dos corpos vai se aproximar da Terra enquanto o outro vai se afastar. Os resultados experimentais anteriores podem ser resumidos dizendo que se $(P_A/P_B)(d_A/d_B) > 1$ então A descerá e B subirá. Caso $(P_A/P_B)(d_A/d_B) < 1$ então A subirá e B descerá.

Experiência 8.5

Pegamos 16 clipes de mesmo peso. De um lado da alavanca colocamos 1 clipe a 10 cm do fulcro, 2 clipes a 8 cm do fulcro e 3 clipes a 4 cm do fulcro. Do outro lado colocamos 1 clipe a 2 cm do fulcro e 9 clipes a 4 cm do fulcro. Observa-se que a alavanca fica em equilíbrio, Figura 8.7.

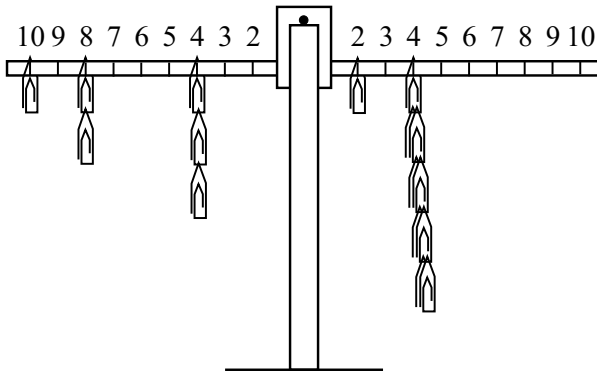



Figura 8.7: Princípio de superposição.

Esta experiência mostra que, no que diz respeito à rotação da alavanca, os pesos atuam proporcionalmente às distâncias que estão do fulcro e de forma independente entre si. Ou seja, os efeitos dos pesos em suas distâncias do fulcro seguem a lei da adição. Isto é expresso na física dizendo que a lei da alavanca segue o princípio de superposição.

O resultado desta experiência específica também se verifica em outros casos e pode ser generalizado da seguinte maneira. Colocam-se N pesos P_1, P_2, ..., P_N de um dos lados da alavanca suspensos, respectivamente, nas distâncias d_1, d_2, ..., d_N do plano vertical passando pelo fulcro. Colocam-se M pesos P_{N+1}, P_{N+2}, ..., P_{N+M} do outro lado da alavanca suspensos, respectivamente, nas distâncias d_{N+1}, d_{N+2}, ..., d_{N+M} do plano vertical passando pelo fulcro. Observa-se que

este sistema só permanece em equilíbrio ao ser solto do repouso com a alavanca na horizontal caso

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} \ . \qquad (8.2)$$

Aqui P_0 e d_0 são um peso e uma distância escolhidos de maneira arbitrária (podem ser, por exemplo, $P_0 = P_1$ e $d_0 = d_1$, ou então $P_0 = P_2$ e $d_0 = d_2$, ou então ...)

Esta é a parte final da primeira lei da mecânica. Ou seja, é a lei da alavanca combinada com o princípio da superposição.

Usando P_0 como sendo o peso de 1 clipe e $d_0 = 1$ cm no exemplo anterior, teríamos do lado esquerdo: $1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 38$. Do lado direito: $1 \cdot 2 + 9 \cdot 4 = 38$. Isto caracteriza o estado de equilíbrio.

Experiência 8.6

Dependuramos uma alavanca pelo fulcro em um dos lados de uma balança de braços iguais, tal que a alavanca fique na horizontal sem a colocação de pesos adicionais. Do outro lado da balança dependuramos um peso P_{Tr} igual ao peso da alavanca, tal que a balança fique em repouso na horizontal, como na Figura 8.8a. Pegamos então dez clipes iguais de mesmo peso. Colocamos sobre uma haste da alavanca 3 clipes à distância de 4 cm do fulcro e 2 clipes na haste oposta a 6 cm do fulcro. Procuramos então quantos clipes iguais temos de colocar no outro lado da balança para que ela fique em equilíbrio. Experimentalmente vem que isto só ocorre com a colocação de cinco clipes, Figura 8.8b.

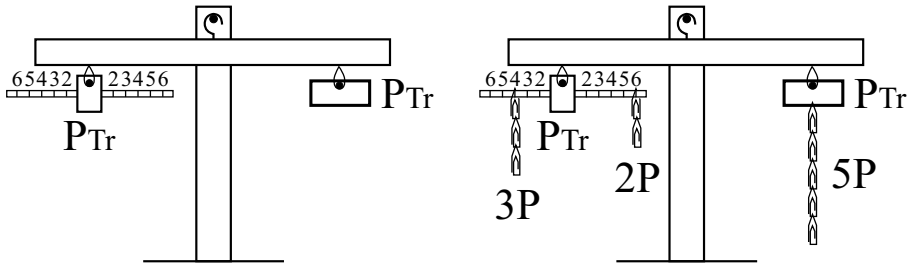



Figura 8.8: Alavancas em equilíbrio.

Esta experiência e outras análogas mostram que o fulcro de uma alavanca em equilíbrio com pesos P_A e P_B a distâncias d_A e d_B do fulcro, respectivamente, tal que $P_A/P_B = d_B/d_A$, suporta um peso total $P_{Tr} + P_A + P_B$. Aqui P_{Tr} é o peso do travessão da alavanca (isto é, o peso da alavanca sem a inclusão dos corpos A e B, mas podendo incluir a rolha e o alfinete, caso a rolha e o alfinete estejam ligados rigidamente ao travessão, podendo girar junto com ele), que estamos supondo que atue sobre o CG do travessão, com o fulcro e o CG do travessão estando sobre um mesmo plano vertical. Podemos então pensar

que existem quatro forças atuando sobre o travessão da alavanca: (A) o peso do travessão atuando para baixo sobre o CG do travessão, (B) o peso do corpo A atuando para baixo à distância d_A do fulcro, (C) o peso do corpo B atuando para baixo à distância d_B do outro lado do fulcro, e (D) a normal N atuando para cima sobre o fulcro, Figura 8.9.

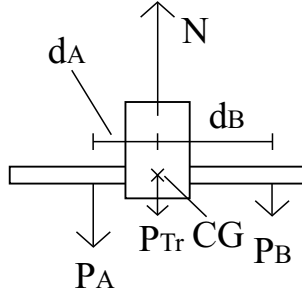



Figura 8.9: Forças atuando sobre uma alavanca quando o CG do travessão e o fulcro estão em um mesmo plano vertical.

Os pesos do travessão e dos corpos A e B são devidos à interação gravitacional com a Terra. A força normal é exercida pelo suporte sobre o fulcro, surgindo da tensão ou da compressão do suporte. O suporte vai estar esticado ou sob tração quando ele é um gancho (ou um fio, ou uma mola) preso a um suporte rígido pela parte superior do gancho, com a parte inferior do gancho suportando o travessão, e mantendo o fulcro da alavanca na parte inferior, como na experiência já apresentada. O suporte vai estar comprimido quando for uma barra rígida ou uma mola colocada abaixo do fulcro, como na maior parte das situações que consideramos até aqui. Vemos então que existem duas condições para o equilíbrio da alavanca:

$$N = P_{Tr} + P_A + P_B \ , \tag{8.3}$$

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{d_B}{d_A} \ . \tag{8.4}$$

Esta última relação tem de ser generalizada caso o fulcro não esteja ao longo do mesmo plano vertical passando pelo CG do travessão. Vamos supor que o CG da alavanca (incluindo o travessão, rolha e alfinete, mas sem incluir os corpos A e B) esteja do mesmo lado do plano vertical passando pelo fulcro que o corpo B, à distância d_{Tr} deste plano, Figura 8.10.

Neste caso as condições de equilíbrio são dadas por:

$$N = P_{Tr} + P_A + P_B \ , \tag{8.5}$$

$$\frac{P_A}{P_0}\frac{d_A}{d_0} = \frac{P_{Tr}}{P_0}\frac{d_{Tr}}{d_0} + \frac{P_B}{P_0}\frac{d_B}{d_0} \ . \tag{8.6}$$

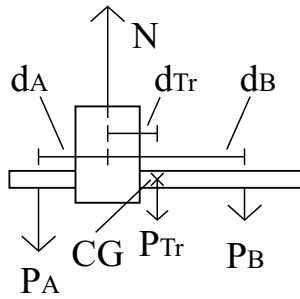



Figura 8.10: Forças atuando sobre uma alavanca quando o CG do travessão está fora do plano vertical passando pelo fulcro.

Novamente, P_0 e d_0 são pesos e distâncias escolhidos de maneira arbitrária.

Se $d_{Tr} = 0$ ou se pudermos desprezar o peso da alavanca em comparação com os pesos dos corpos A e B, então voltamos ao caso anterior.

Se tivermos vários corpos atuando sobre a alavanca podemos usar o princípio de superposição dado anteriormente para estabelecer as condições de equilíbrio.

Complemento à lei da alavanca: A força atuando para baixo exercida pelo fulcro sobre o suporte, no caso de uma alavanca em equilíbrio, é composta pela soma dos pesos dos corpos dependurados, mais o peso da alavanca (ou seja, de seu travessão, linhas e pratos).

8.3 Tipos de Alavanca

Já vimos anteriormente como utilizar uma balança de braços iguais para quantificar forças de qualquer natureza (de contato, elástica, elétrica, magnética etc.) comparando-as com a força peso. Isto é, uma força F atuando sobre um lado de uma balança de braços iguais e equilibrando um peso P do outro lado da balança é definida como sendo igual ao peso. Esta definição operacional, juntamente com a lei da alavanca, está por trás da utilização da alavanca como uma máquina simples. A lei da alavanca mostra que um peso pequeno pode equilibrar um grande peso desde que esteja bem mais afastado do fulcro do que o peso maior. Uma máquina simples é um dispositivo que pode multiplicar a intensidade de uma força com o objetivo de realizar algum trabalho.

Nesta Seção vamos desprezar o peso da alavanca comparado com as outras forças que estão atuando sobre ela.

A lei da alavanca afirma que um peso P_A atuando à distância d_A do plano vertical passando pelo fulcro equilibra um outro peso P_B atuando à distância d_B do outro lado do plano vertical passando pelo fulcro quando $P_A/P_B = d_B/d_A$. Quando utilizamos uma alavanca como uma máquina simples, é mais conveniente falar de forças do que de pesos, já que as forças atuando na alavanca não precisam ter origem gravitacional. Vamos então nos referir a F_A como sendo a força aplicada na máquina pelo operador (homem, animal ou instrumento me-

cânico) e de F_R como sendo a força resistente, ou força que a máquina aplica na carga (peso a ser levantado ou empurrado, corpo a ser comprimido ou esticado, figura a ser cortada etc.). Para simplificar vamos supor ainda que os pontos de atuação de F_A e de F_R estão alinhados com o fulcro da alavanca, com estas duas forças atuando em direções perpendiculares a esta reta. Os braços da alavanca, ou seja, as distâncias entre os pontos de aplicação destas forças e o fulcro, serão representados por d_A e d_R, respectivamente. O equilíbrio da alavanca é então dado pela relação $F_A/F_R = d_R/d_A$.

Define-se a vantagem mecânica de uma máquina simples como sendo a razão entre a força resistente e a força aplicada.

Podemos então pensar que existem três elementos em uma alavanca: a força aplicada, a força resistente e o fulcro, que permanece sempre em repouso em relação à Terra. Dependendo da posição do fulcro em relação às forças aplicada e resistente, existirão três tipos básicos de alavanca, [Net]: de primeira classe ou interfixa, de segunda classe ou inter-resistente, e de terceira classe ou interpotente.

(A) Nas alavancas interfixas o fulcro localiza-se entre a força aplicada e a força resistente, Figura 8.11a.

(B) Nas alavancas inter-resistentes a força resistente localiza-se entre o fulcro e a força aplicada, Figura 8.11b.

(C) Nas alavancas interpotentes a força aplicada localiza-se entre o fulcro e a força resistente, Figura 8.11c.

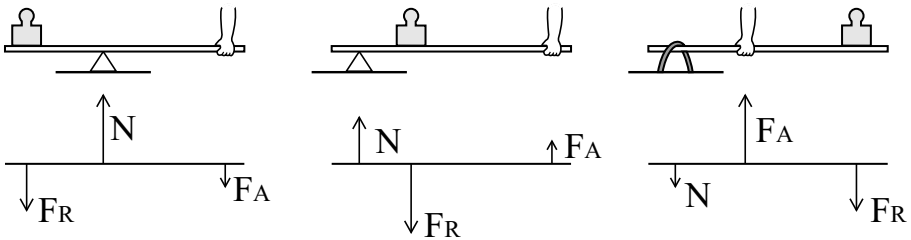



Figura 8.11: Tipos de alavanca e as forças aplicadas sobre elas.

Até o momento só trabalhamos com alavancas interfixas, isto é, nas quais o fulcro está entre a força aplicada e a força resistente. Os exemplos mais comuns deste tipo de alavanca são: balança de braços iguais, balança romana, balanço de crianças, tesoura, pé-de-cabra, martelo tirando um prego preso em uma tábua, alicate, remo, furador de papel, abridor de latas etc.

Alguns exemplos comuns de alavancas inter-resistentes: carrinho de mão, quebra-nozes, cortador manual de papel, abridor de garrafas, chave inglesa, manivela, pedal com corrente de bicicleta etc.

Alguns exemplos comuns de alavancas interpotentes: pinça, pegador de gelo, vara de pescar etc.

8.4 Definição Matemática do Centro de Gravidade

A lei da alavanca e o princípio da superposição nos permitem definir matematicamente o centro de gravidade de um corpo ou de um conjunto de corpos. Já vimos anteriormente que a condição de equilíbrio de qualquer corpo dependurado por um ponto de suspensão PS é que este ponto e o CG do corpo estejam ao longo de uma vertical. O equilíbrio será estável (instável) se qualquer perturbação na posição do corpo fizer com que o CG suba (desça) em relação à sua posição anterior. Caso o corpo esteja dependurado por dois pontos (como a balança ou alavanca feita de rolha, palito de churrasco e agulha, na qual a agulha horizontal está apoiada nas duas extremidades por uma superfície lisa), o CG do corpo no equilíbrio estará ao longo do plano vertical passando pelos dois pontos de suspensão. O mesmo ocorre no caso do corpo estar girando ao redor de um eixo horizontal, fixo em relação à Terra. Ou seja, o CG do corpo, no equilíbrio, estará verticalmente abaixo do eixo.

Vamos então considerar uma alavanca em equilíbrio estável na horizontal sem a colocação de outros corpos. Vamos supor uma alavanca com uma haste homogênea tal que quando o fulcro fica ao longo de um plano vertical que divide a haste em duas partes de mesmo comprimento, a alavanca permaneça em equilíbrio ao ser solta do repouso, parada na horizontal. O CG do travessão está verticalmente abaixo do fulcro, ou do PS. Vimos experimentalmente que este equilíbrio não é perturbado caso sejam colocados dois corpos A e B dependurados em lados opostos da alavanca, desde que $d_B/d_A = P_A/P_B$, onde d_A e d_B são as distâncias horizontais entre os pontos de suspensão de A e de B até o plano vertical passando pelo fulcro, sendo P_A e P_B os pesos de A e de B, respectivamente. Isto significa que o CG destes dois corpos também está sobre o plano vertical passando pelo fulcro. Caso a relação d_B/d_A seja diferente de P_A/P_B a alavanca não ficará em equilíbrio.

Para encontrar uma expressão algébrica que forneça a localização do CG dos corpos A e B podemos imaginar um eixo x horizontal ao longo da haste da alavanca. A origem $x = 0$ é escolhida de forma arbitrária. Vamos supor que as extremidades da haste da alavanca de comprimento L estejam localizadas em x_E e $x_D = x_E + L$. Vamos então supor que colocamos os corpos A e B dependurados nas posições x_A e x_B do eixo x, respectivamente. Vamos supor ainda que a alavanca continue em equilíbrio ao ser solta do repouso com os corpos A e B atuando nestas posições, Figura 8.12.

O CG deste sistema tem de estar sobre o plano vertical passando pelo fulcro quando $d_B/d_A = P_A/P_B$, já que neste caso a alavanca permanece em equilíbrio. Vamos representar a localização do centro de gravidade dos corpos A e B por x_{CG}. Da Figura 8.12 vem que $d_A = x_{CG} - x_A$ e $d_B = x_B - x_{CG}$. A partir da lei da alavanca podemos definir então, matematicamente, a posição x_{CG} do centro de gravidade deste sistema de dois corpos ao longo do eixo x como sendo dada por:

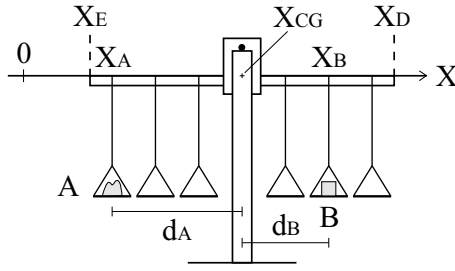



Figura 8.12: Encontrando uma expressão algébrica para o centro de gravidade.

$$\frac{x_B - x_{CG}}{x_{CG} - x_A} \equiv \frac{P_A}{P_B} \ . \tag{8.7}$$

Ou seja,

$$x_{CG} \equiv \frac{P_A}{P_T} x_A + \frac{P_B}{P_T} x_B \ , \tag{8.8}$$

onde $P_T \equiv P_A + P_B$ é o peso total dos dois corpos.

Esta definição teórica para x_{CG} é feita desta maneira para que coincida com os resultados experimentais anteriores relacionados ao CG dos corpos rígidos. Ou seja, para que no equilíbrio o CG do conjunto esteja ao longo do plano vertical passando pelo fulcro da alavanca. Se $P_A = P_B$, vemos desta expressão que x_{CG} estará no ponto médio entre x_A e x_B. Por outro lado, quanto maior (menor) for a razão P_A/P_B, mais próximo (afastado) estará x_{CG} do corpo A.

Daqui em diante vamos supor a aproximação de partículas ou de corpos pontuais. Isto é, corpos A e B tais que as maiores dimensões de qualquer um deles (seus diâmetros, ou a maior distância entre quaisquer pontos materiais pertencentes a um destes corpos) sejam muito menores do que a distância entre A e B. Neste caso podemos tratar os corpos como estando concentrados em regiões pequenas comparadas com a distância entre eles, como se estivessem concentrados em pontos matemáticos.

Vamos supor agora um sistema rígido de eixos ortogonais xyz com origem O em $x = y = z = 0$. Considera-se este sistema de eixos parado em relação à Terra, com uma orientação fixa em relação ao solo e aos objetos terrestres. A localização espacial do corpo A será representada por (x_A, y_A, z_A), Figura 8.13, e a do corpo B por (x_B, y_B, z_B). Com isto podemos generalizar a relação anterior do CG do sistema de corpos A e B para incluir também os eixos y e z. Isto é, definimos de forma análoga as coordenadas y e z do CG, denominadas por, respectivamente, y_{CG} e z_{CG}:

$$y_{CG} \equiv \frac{P_A}{P_T} y_A + \frac{P_B}{P_T} y_B \ , \tag{8.9}$$

$$z_{CG} \equiv \frac{P_A}{P_T} z_A + \frac{P_B}{P_T} z_B \ . \tag{8.10}$$

Com isto podemos utilizar também a notação vetorial. Denominamos o vetor posição do corpo A por $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, como na Figura 8.13, enquanto que $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ é o vetor posição do corpo B.

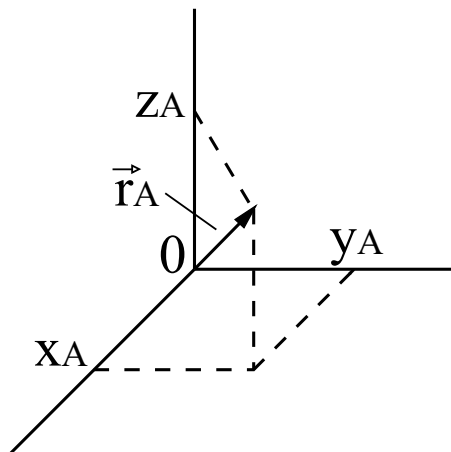



Figura 8.13: Encontrando o CG com notação vetorial.

O vetor posição do CG, $\vec{r}_{CG}$, é definido por:

$$\vec{r}_{CG} \equiv \frac{P_A}{P_T}\vec{r}_A + \frac{P_B}{P_T}\vec{r}_B \ . \tag{8.11}$$

Pelo princípio da superposição estas relações podem ser estendidas para um conjunto de N partículas. Seja P_i o peso do corpo i localizado em (x_i, y_i, z_i), com $i = 1,\ 2,\ ...,\ N$. A componente x do CG deste conjunto de partículas é definida por (com $P_T \equiv \sum_{i=1}^{N} P_i$ sendo o peso total do conjunto de partículas):

$$x_{CG} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_T} x_i \ . \tag{8.12}$$

Expressões análogas são definidas para as componentes y e z do CG.

O vetor posição do CG deste sistema de corpos pontuais é definido por:

$$\vec{r}_{CG} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_T} \vec{r}_i \ . \tag{8.13}$$

Esta é a definição matemática moderna do CG de um sistema de partículas. Ela permite o cálculo teórico do CG se forem dados os pesos das partículas e suas respectivas localizações espaciais.

Se tivermos distribuições contínuas de matéria, como no caso de figuras filiformes, planas ou volumétricas, o procedimento é o mesmo. Em primeiro lugar substituímos as somatórias por integrais lineares, superficiais ou volumétricas. E em vez do peso P_i da partícula i utilizamos um elemento infinitesimal de peso,

dP, localizado em $\vec{r} = (x, y, z)$. Este elemento de peso dP é o peso contido em um elemento infinitesimal de comprimento, de área ou de volume. O peso total é dado por $P_T = \int\int\int dP$. Com isto vem que o vetor posição do CG pode ser definido por:

$$\vec{r}_{CG} \equiv \int\int\int \frac{dP}{P_T}\vec{r} \; . \tag{8.14}$$

Estas integrais de volume devem ser realizadas sobre todo o espaço ocupado pelo corpo. Se tivermos matéria distribuída continuamente ao longo de uma linha ou de uma superfície, substituímos estas integrais volumétricas por integrais lineares ou superficiais, respectivamente.

Se tivermos combinações discretas e contínuas de matéria, basta somarmos as expressões correspondentes para obter o CG do conjunto como um todo, já que o CG segue o princípio de superposição.

Não vamos entrar em detalhes matemáticos aqui nem fazer cálculos específicos do CG para nenhuma distribuição de matéria, pois este não é o objetivo deste livro.

Podemos resumir a definição matemática moderna do CG como sendo dada por

Definição Matemática $CG9$:

$$\vec{r}_{CG} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_T}\vec{r}_i \quad \text{ou} \quad \vec{r}_{CG} \equiv \int\int\int \frac{dP}{P_T}\vec{r} \; . \tag{8.15}$$

Estas são as definições teóricas que se utilizam atualmente para calcular o CG de distribuições discretas ou contínuas de matéria, sendo dados os pesos dos corpos e suas localizações espaciais.

Um teorema importante que simplifica a localização do centro de gravidade afirma o seguinte, adaptado de [Sym82, pág. 251]: "Se um corpo for composto de duas ou mais partes cujos centros de gravidade são conhecidos, então o centro de gravidade do corpo composto pode ser calculado considerando suas partes componentes como sendo partículas localizadas em seus respectivos centros de gravidade."

Uma demonstração deste teorema começando com a definição $CG9$ pode ser dada como segue. Seja um corpo composto de N partes de pesos P_1, ..., P_N. Vamos supor que uma parte qualquer P_k é composta de N_k partes de pesos P_{k1}, ..., P_{kN_k}, cujos centros de gravidade estão localizados nos pontos $\vec{r}_{k1}$, ..., $\vec{r}_{kN_k}$. Neste caso o centro de gravidade da parte P_k de acordo com a definição $CG9$ está localizado em:

$$\vec{r}_k \equiv \sum_{\ell=1}^{N_k} \frac{P_{k\ell}}{P_k}\vec{r}_{k\ell} \; , \tag{8.16}$$

onde

$$P_k \equiv \sum_{\ell=1}^{N_k} P_{k\ell} \ . \tag{8.17}$$

O centro de gravidade do corpo composto é localizado no ponto

$$\vec{r} \equiv \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N_k} \frac{P_{k\ell}}{P_T} \vec{r}_{k\ell} \ , \tag{8.18}$$

onde

$$P_T \equiv \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N_k} P_{k\ell} \ . \tag{8.19}$$

Isto significa que o centro de gravidade de todo o corpo pode ser escrito como

$$\vec{r} \equiv \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N_k} \frac{P_{k\ell}}{P_T} \vec{r}_{k\ell} = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k}{P_T} \left(\sum_{\ell=1}^{N_k} \frac{P_{k\ell}}{P_k} \vec{r}_{k\ell} \right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k}{P_T} \vec{r}_k \ . \tag{8.20}$$

O peso total também pode ser escrito como

$$P_T \equiv \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N_k} P_{k\ell} = \sum_{k=1}^{N} P_k \ . \tag{8.21}$$

As equações (8.20) e (8.21) contêm a expressão matemática do teorema que se queria demonstrar.

Arquimedes conhecia um teorema análogo a este de que "se um corpo for composto de duas ou mais partes cujos centros de gravidade são conhecidos, então o centro de gravidade do corpo composto pode ser calculado considerando suas partes componentes como sendo partículas localizadas em seus respectivos centros de gravidade." Ele aparece com outras palavras na Proposição 8 de seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, traduzido no Apêndice B. Ele o utiliza na Proposição 15 para calcular o CG de um trapézio. Para isto considera um triângulo grande dividido por um segmento de reta paralelo à base do triângulo em duas partes: um triângulo menor e um trapézio. Conhecendo o CG do triângulo grande e do triângulo pequeno, Arquimedes utiliza este teorema para achar o CG do trapézio.

Capítulo 9

Explicações e Deduções da Lei da Alavanca

9.1 Lei da Alavanca como um Resultado Experimental

As coisas que vimos até o momento constituem os aspectos mais importantes da estática. Podemos resumir o conjunto da seguinte forma:

Definições: Dizemos que uma balança de braços iguais está em equilíbrio quando seus braços ficam parados na horizontal, tendo ela liberdade para girar ao redor do fulcro. Dois corpos A e B possuem o mesmo peso P se, ao serem colocados em pratos separados de uma balança de braços iguais inicialmente em repouso na horizontal, permanecem em repouso. O corpo que equilibra outros N corpos de mesmo peso P em uma balança de braços iguais possui N vezes o peso P.

Resultados experimentais: Dois corpos de pesos P_A e P_B se equilibram em lados opostos de uma alavanca horizontal (que tem o CG do travessão no plano vertical passando pelo fulcro) se $P_A/P_B = d_B/d_A$, sendo d_A e d_B as distâncias horizontais entre os pontos de atuação dos corpos A e B e um plano vertical passando pelo fulcro da alavanca. Se tivermos N corpos atuando de um lado da alavanca e M corpos do outro lado, o equilíbrio pode ser obtido pelo princípio de superposição. Isto é, considerando que os pesos atuam de maneira independente entre si, tal que podemos somar suas contribuições individuais. Ou seja, vai haver equilíbrio se valer a relação

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} \ . \tag{9.1}$$

Pode-se tirar um resultado interessante a partir desta última condição de equilíbrio. Vamos supor que em um dos lados da alavanca temos dois pesos

iguais $P_1 = P_2 = P$ nas distâncias $d_1 = d - x$ e $d_2 = d + x$ do fulcro. É fácil ver que

$$\frac{P_1}{P_0}\frac{d_1}{d_0} + \frac{P_2}{P_0}\frac{d_2}{d_0} = \frac{P}{P_0}\frac{d-x}{d_0} + \frac{P}{P_0}\frac{d+x}{d_0} = \frac{2P}{P_0}\frac{d}{d_0} = \frac{P}{P_0}\frac{2d}{d_0} \ . \qquad (9.2)$$

Isto é, estes dois pesos P_1 e P_2 são equivalentes a um único peso $P_3 = 2P$ atuando à distância $d_3 = d$ do fulcro, ou a um único peso $P_4 = P$ atuando à distância $d_4 = 2d$ do fulcro. A equivalência aqui se refere à tendência de fazer a alavanca girar. Ou seja, se P_1 e P_2 mantinham a alavanca em equilíbrio, então $P_3 = 2P$ atuando em $d_3 = d$ também vai mantê-la em equilíbrio. Veremos depois que se pode inverter a situação. Isto é, pode-se partir da equivalência do conjunto P_1 e P_2 em relação a P_3, para se chegar na lei da alavanca.

Com a lei matemática da alavanca podemos explicar o resultado experimental de que no equilíbrio o CG de um corpo rígido está ao longo da vertical passando pelo PS. Como a expressão matemática do CG, isto é, a definição $CG9$, foi definida de acordo com a lei da alavanca, este resultado segue automaticamente.

Pode-se utilizar a lei experimental da alavanca para deduzir as conseqüências de situações mais complexas. Isto é, sem tentar explicar a lei da alavanca, simplesmente a aceitamos como um dado empírico dado pela natureza. Podemos então utilizar esta lei para explicar o funcionamento de diversos tipos de máquinas simples (como as baseadas em alavancas interfixa, interpotente ou inter-resistente). Este é o procedimento mais simples possível, não havendo nenhum problema em se assumir este ponto de vista.

Outra alternativa é tentar derivar, experimentalmente ou teoricamente, a lei da alavanca. Para isto é necessário partir de outros resultados experimentais, ou então é necessário criar outros conceitos e postulados teóricos. Uma motivação para isto pode ser a de encontrar algo mais simples a partir do qual se pode chegar na lei da alavanca. Uma motivação oposta pode ser a de partir de algo mais complexo ou mais abstrato do que a própria lei da alavanca, para com isto chegar não apenas nesta lei mas também em outros resultados. Por exemplo, pode ser possível utilizar estes novos conceitos e postulados não apenas para se chegar na lei da alavanca, mas também em outros resultados independentes desta lei, como a lei do plano inclinado. Um outro motivo para se procurar este caminho é que se podem utilizar estes novos conceitos e postulados para se chegar em outras leis e resultados físicos, válidos não apenas em situações de equilíbrio mas também, por exemplo, no caso de corpos em movimento em relação à Terra (como no caso de se estudar as leis que regem a rotação de corpos rígidos, por exemplo).

Sempre que seguimos este procedimento alternativo, deve se ter em mente que não podemos explicar tudo. Isto é, podemos postular a lei da alavanca (L) sem explicá-la e então derivar com ela as conseqüências (C_1), (C_2), (C_3) etc. Ou, alternativamente, podemos postular alguma outra lei (P) sem explicá-la e então derivar com ela os resultados (L), (C_1), (C_3) etc. O aspecto principal a ser observado é que em todos os procedimentos sempre precisamos começar de algum axioma ou postulado (que não tem explicação) para poder obter outras

coisas com ele. A única justificativa dos axiomas e postulados básicos pode ser a de que eles concordam com os dados experimentais ou a de que eles levam a dados experimentais que podem ser verificados na prática.

Nas próximas Seções veremos algumas possibilidades de se derivar a lei da alavanca partindo de alguns outros resultados experimentais ou então de certos postulados teóricos. Existem ainda outras possibilidades de se derivar esta lei mas que não serão apresentadas aqui. Em particular existe um trabalho da escola Aristotélica, *Problemas Mecânicos*, que trata da lei da alavanca. Para uma discussão deste enfoque ver [Ass97]. Para uma análise de um antigo trabalho chinês de aproximadamente 300 a.C. tratando com esta lei ver [BRS03].

9.2 Lei da Alavanca Derivada a partir do Conceito de Torque

Vimos nas Seções 7.5 e 8.2 que a primeira condição de equilíbrio para que um corpo fique parado em relação à Terra, com a atuação da gravidade, é que o peso atuando para baixo sobre ele seja contrabalançado por uma outra força N atuando para cima, de intensidade igual ao peso. Isto evita o movimento do corpo como um todo em relação à Terra. No caso da balança ou da alavanca temos um eixo horizontal fixo em relação à Terra, o fulcro. Logo, o peso dos corpos colocados sobre a haste da alavanca, juntamente com o peso da própria alavanca (do seu travessão, por exemplo), têm de ser contrabalançados por uma força normal N atuando para cima sobre o fulcro, exercida pelo suporte da alavanca. Apesar disto, ainda existe a possibilidade da balança girar ao redor do fulcro.

Já vimos que para o equilíbrio de uma alavanca não basta o conceito de peso, pois dois pesos iguais atuando a distâncias diferentes do fulcro não se equilibram. Neste caso o peso que atua a uma maior distância do fulcro vai tombar aproximando-se da Terra, com o outro peso afastando-se dela, embora o fulcro possa continuar fixo em relação à Terra. Ou seja, pesos iguais atuando a distâncias diferentes do fulcro tendem a girar a alavanca.

Vemos então que precisamos de um outro conceito, além do peso do corpo ou da força resultante sobre ele, para estabelecer as condições de equilíbrio de um corpo rígido como o travessão de uma alavanca. A partir da lei da alavanca pode-se então definir um novo conceito relacionado à rotação de um corpo rígido em relação a um eixo horizontal fixo em relação à Terra. Vamos supor o caso mais simples em que o fulcro da alavanca (isto é, o eixo horizontal ao redor do qual ela pode girar), está verticalmente acima do CG da alavanca. Vamos então supor que duas forças F_A e F_B passam a atuar no mesmo sentido, verticalmente para baixo, a distâncias horizontais d_A e d_B, respectivamente, do plano vertical passando pelo fulcro, plano este que também contém o CG do travessão. A lei experimental da alavanca nos diz que se a alavanca for solta do repouso, podendo girar ao redor do fulcro, ela permanecerá em repouso sob a ação destas duas forças apenas se $F_A/F_B = d_B/d_A$.

Definimos então que o que causa a rotação de um corpo rígido ao redor de um eixo fixo em relação à Terra é o "torque ou momento de uma força." Vamos representar este torque ou momento de uma força pela letra T. A lei experimental da alavanca nos permite definir de maneira quantitativa a razão T_A/T_B entre as intensidades dos torques exercidos pelas duas forças F_A e F_B já mencionadas, como sendo dada por

$$\frac{T_A}{T_B} \equiv \frac{F_A}{F_B}\frac{d_A}{d_B} \ . \tag{9.3}$$

Esta definição foi sugerida por um resultado experimental. Mas agora que já temos esta definição, podemos inverter o procedimento. Neste sentido, o procedimento usual é postular que a alavanca vai permanecer em equilíbrio se $T_A = T_B$. Este postulado e a definição anterior da razão das intensidades dos dois torques nos leva à lei da alavanca, isto é, $(F_A/F_B)(d_A/d_B) = 1$. Caso $T_A/T_B > 1$ e a alavanca for solta do repouso na horizontal, postula-se que o corpo A vai se aproximar da Terra e o corpo B vai se afastar dela. Caso $T_A/T_B < 1$, postula-se que o corpo A vai se afastar da Terra e o corpo B vai se aproximar dela.

Pode parecer que não se ganha nada com esta dedução teórica. Afinal de contas, estamos definindo a razão de torques em conformidade com a lei da alavanca, para no final chegar à própria lei, postulando que são iguais os torques atuando dos dois lados de uma alavanca em equilíbrio. Mas como já mencionado, este procedimento pode ser vantajoso se o utilizarmos não apenas para a lei da alavanca, mas também como a base para se estudar o movimento de rotação de corpos rígidos ou outros casos mais complexos.

Com este conceito se pode derivar também o resultado empírico de que no equilíbrio o CG de um corpo rígido fica ao longo de uma vertical passando pelo ponto de suspensão. Este ponto de suspensão é fixo em relação à Terra e o corpo rígido é livre para girar ao redor dele. Para demonstrar o resultado empírico é necessário postular também que o peso de qualquer corpo se comporta como se estivesse atuando verticalmente para baixo sobre seu CG. Como a força exercida sobre o corpo rígido pelo fulcro ou pelo suporte não exerce nenhum torque sobre o corpo rígido (pois esta força atua a uma distância nula do suporte tendo, portanto, braço nulo), sobra o torque exercido pelo peso. E este só vai se anular se o PS e o CG estiverem ao longo de uma vertical.

O torque também pode ser tratado de maneira algébrica. Neste caso escolhe-se uma tendência de giro (por exemplo, o giro da alavanca no plano vertical no sentido de abaixar o corpo A, subindo o corpo B do outro lado da alavanca) como sendo devido a um torque positivo, escolhendo-se a tendência de giro no sentido oposto como sendo devida a um torque negativo. No caso da Figura 9.1, por exemplo, o peso do corpo A exerceria um torque positivo sobre a alavanca, enquanto que o torque devido ao peso B exerceria um torque negativo sobre ela. Neste caso, o postulado fundamental seria que a soma algébrica dos torques atuando sobre o corpo rígido tem de ser nulo para que ele fique equilibrado ao ser solto do repouso, sem girar ao redor de um eixo fixo.

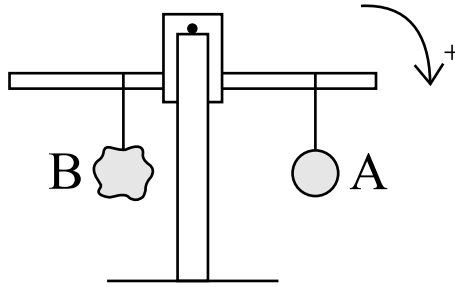



Figura 9.1: Torque algébrico.

Se temos N corpos de um lado da alavanca e M corpos do outro lado da alavanca o postulado básico é generalizado pelo princípio de superposição. Isto é, postulamos que a alavanca vai ficar em equilíbrio se

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} \ . \tag{9.4}$$

Aqui P_i é o peso do corpo i atuando à distância horizontal d_i do plano vertical passando pelo fulcro da alavanca. Além disso, P_0 e d_0 são pesos e distâncias escolhidos arbitrariamente (podem ser P_1 e d_1, ou ...). Caso uma destas somas seja maior do que a outra, postula-se que o lado que tem a maior soma vai se aproximar da Terra se a alavanca for solta do repouso, com o outro lado afastando-se da Terra.

Embora esta dedução teórica da lei da alavanca começando com o postulado e as definições anteriores esteja correta, vale ressaltar que o conceito de torque de uma força foi sugerido historicamente a partir do conhecimento empírico da lei da alavanca. Isto é, foi o conhecimento experimental de que dois corpos se equilibram em uma alavanca com suas distâncias inversamente proporcionais aos pesos que sugeriu a criação do conceito de torque. Suponha que a natureza fornecesse a lei experimental da alavanca como sendo dada, por exemplo, pela relação

$$\frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^{\alpha} \ , \tag{9.5}$$

com $\alpha = 2$ ou outro valor. Neste caso seria natural definir, em vez da razão de torques usual, outra grandeza proporcional a $(P_i/P_0)(d_i/d_0)^{\alpha}$. Poderia se postular então que o valor resultante desta nova grandeza se anularia em situações de equilíbrio, para assim se derivar teoricamente a nova lei da alavanca.

No fundo o que queremos dizer é que tanto as definições de torque quanto de CG (como sendo proporcionais à distância entre o ponto de aplicação da força e o fulcro), assim como o postulado de que é nula a soma algébrica dos torques atuando sobre um corpo rígido em equilíbrio, só se justificam por levarem à lei correta da alavanca observada empiricamente. Estas definições e postulados

foram sugeridos pela lei experimental. Se a lei empírica fosse outra, deveríamos criar outros conceitos e postulados. O mesmo ocorre ao se descobrir limites de validade de qualquer lei empírica. Nestes casos os conceitos e postulados têm de ser generalizados ou modificados para se adequarem à nova realidade experimental.

9.3 Lei da Alavanca Derivada a partir do Resultado Experimental de que um Peso $2P$ Atuando à Distância d do Fulcro é Equivalente a um Peso P Atuando à Distância $d - x$ do Fulcro, Juntamente com um Peso P Atuando à Distância $d + x$ do Fulcro

Uma maneira bem simples de se chegar na lei da alavanca utiliza dois ingredientes básicos: (I) Pesos iguais se equilibram quando atuam a distâncias iguais do fulcro, e (II) Um peso $2P$ atuando à distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro é equivalente a um peso P atuando à distância $d - x$ do fulcro, juntamente com outro peso P atuando à distância $d + x$ do fulcro, ver a Figura 9.2. A equivalência aqui se refere à tendência de fazer com que a alavanca gire ao redor do fulcro. O ingrediente (I) pode ser considerado uma definição de igualdade de pesos, enquanto que o ingrediente (II) pode ser considerado como um resultado que vem da experiência, ou então pode ser postulado teoricamente. No momento vamos usá-lo como um resultado experimental.

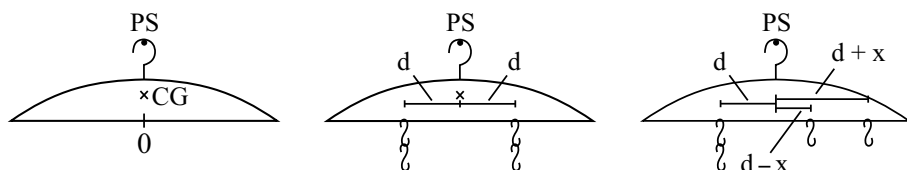



Figura 9.2: Condição experimental de equilíbrio para uma alavanca.

Vamos usar agora um cabide como alavanca. O fulcro ou PS é o eixo horizontal passando pelo gancho do cabide. Consideramos ainda que este eixo está, no equilíbrio, verticalmente acima do CG da alavanca e acima do centro O da seção horizontal do cabide.

A condição experimental (II) pode ser representada pela Figura 9.2c. Ou seja, se a situação da Figura 9.2b é de equilíbrio, vem da experiência que a situação da Figura 9.2c também será de equilíbrio.

Assumindo a condição (II), é fácil chegar à lei da alavanca, bastando que não se imponham limites ao valor de x. Para ver isto, começamos com dois pesos P iguais entre si atuando à mesma distância d de um lado do fulcro, equilibrando outros dois pesos de mesmo valor à distância d do outro lado do fulcro. Movendo

um dos pesos da direita para a posição $d-x$ e o outro peso da direita para $d+x$, com $x = 2d$, terminamos com a situação mostrada na Figura 9.3b. Isto é, uma balança em equilíbrio com um peso $3P$ à distância d do fulcro, juntamente com um peso P à distância $3d$ do outro lado do fulcro, que é um caso particular da lei da alavanca. Ou seja, temos $P_A/P_B = d_B/d_A = 3$.

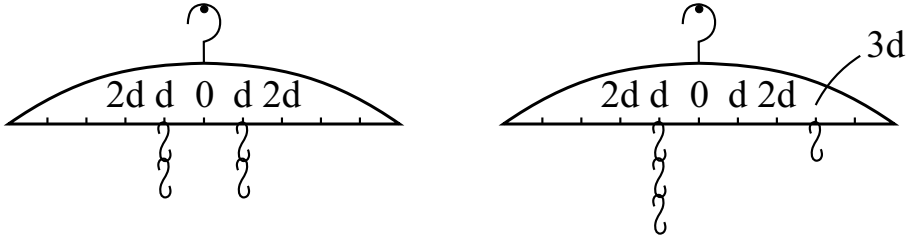



Figura 9.3: Um caso particular da lei da alavanca para o qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 3$.

Se tivéssemos feito $x = d$ chegaríamos na situação de equilíbrio mostrada na Figura 9.4a. Como um dos pesos está no mesmo plano vertical que passa pelo fulcro e pelo CG da alavanca, ele pode ser retirado do sistema sem alterar o equilíbrio. Terminamos então na situação de equilíbrio mostrada na Figura 9.4b. Isto é, uma balança em equilíbrio com um peso $2P$ à distância d do fulcro e outro peso P à distância $2d$ do outro lado do fulcro, que é um outro caso particular da lei da alavanca. Ou seja, $P_A/P_B = d_B/d_A = 2$.

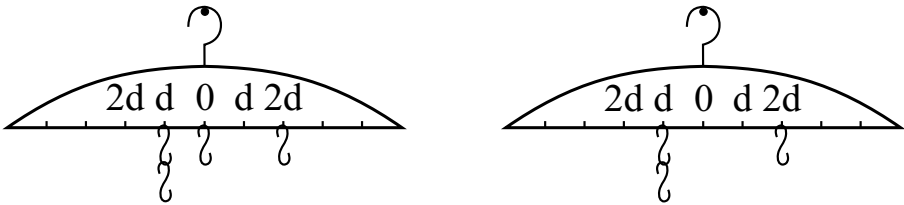



Figura 9.4: Um caso particular da lei da alavanca para o qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 2$.

Vamos agora começar com três pesos P atuando à mesma distância d de um lado do fulcro, sendo equilibrados por outros três pesos P atuando à mesma distância d do outro lado do fulcro, ver a Figura 9.5a. Vamos considerar agora os três pesos P que estão do lado direito do cabide. Podemos manter o equilíbrio movendo um destes pesos para a direita, de uma distância $x = 2d$, movendo um outro destes pesos simultaneamente para a esquerda, também de uma distância $x = 2d$, enquanto que o terceiro destes pesos P permanece fixo em sua posição. Chegamos então ao caso intermediário de equilíbrio mostrado na Figura 9.5b. Isto é, um peso $4P$ à distância d de um lado do fulcro, um peso P à distância d do outro lado do fulcro, e um peso P à distância $3d$ deste mesmo lado do fulcro.

O equilíbrio ainda vai ser mantido se juntarmos estes dois últimos pesos P no ponto intermediário entre eles, ver a Figura 9.5c. Este é um outro caso particular da lei da alavanca, isto é, um peso $4P$ à distância d do fulcro e um peso $2P$ à distância $2d$ do outro lado do fulcro. Esta relação $P_A/P_B = d_B/d_A = 2$ é a mesma relação obtida anteriormente, mas agora não precisamos excluir nenhum peso do sistema, Figura 9.5c.

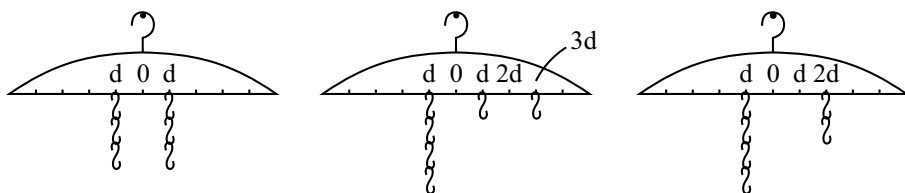



Figura 9.5: Um caso particular da lei da alavanca para o qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 2$.

Vamos começar novamente com três pesos iguais P de cada lado da alavanca, afastados de uma distância d do fulcro, Figura 9.6a. Vamos considerar os três pesos da direita. Movendo um deles para a distância $d - x = 0$ do fulcro e um outro para a distância $d + x = 2d$ do fulcro ($x = d$), terminamos na situação de equilíbrio mostrada no caso intermediário da Figura 9.6b. Como o peso que está no plano vertical passando pelo fulcro e pelo CG da alavanca não afeta o equilíbrio, podemos retirá-lo do sistema. Juntando depois os dois pesos da direita no ponto intermediário entre eles, terminamos no terceiro caso de equilíbrio mostrado na Figura 9.6c. Isto é, um peso $3P$ à distância d do fulcro e um outro peso $2P$ à distância $1,5d$ do outro lado do fulcro. Este é um outro caso particular da lei da alavanca no qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 3/2 = 1,5$.

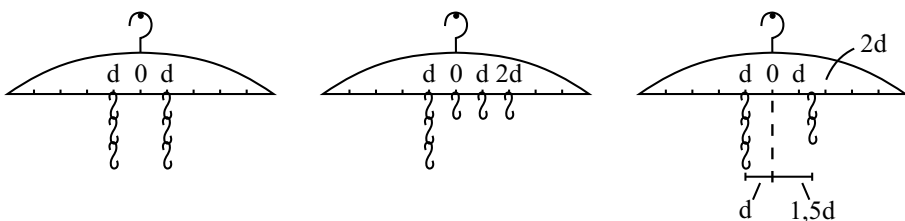



Figura 9.6: Um caso particular da lei da alavanca para o qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 1,5$.

Se tivéssemos começado com 5 clipes iguais de cada lado da alavanca poderíamos chegar nesta mesma relação sem ter de tirar qualquer corpo do sistema.

É fácil estender esta análise para outros casos. Isto mostra como derivar a lei da alavanca começando com o resultado experimental de que um peso $2P$ atuando a uma distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro é equivalente a um peso P agindo a uma distância $d - x$ do fulcro, juntamente

com um outro peso P agindo à distância $d + x$ do fulcro.

9.4 Lei da Alavanca como Derivada por Duhem a partir de uma Modificação de um Trabalho Atribuído a Euclides

O procedimento anterior parece estar na origem de uma das demonstrações teóricas mais antigas da lei da alavanca que se tem notícia. As informações a seguir são tiradas de Duhem e de Clagett, [Duh05, Cap. V], [Duh91, Cap. V] e [Cla79, Cap. I e Documento I.I]. A idéia principal aqui é de considerar a condição experimental anterior como um postulado teórico.

Vamos apresentar aqui os elementos principais de um trabalho sobre mecânica atribuído a Euclides, o famoso autor do livro de geometria *Os Elementos*, [Euc56], que viveu em Alexandria por volta de 300 a.C. Embora a antiguidade grega não atribua a Euclides nenhum trabalho sobre mecânica, muitos autores árabes mencionam obras de Euclides sobre este tema. Três fragmentos sobreviveram até os nossos dias que são atribuídos a ele. Os títulos atribuídos a estes trabalhos são: *Livro sobre a Balança*; *Livro sobre o Pesado e o Leve*; e *Livro sobre os Pesos de acordo com a Circunferência Descrita pelas Extremidades.* O que nos interessa aqui é o primeiro destes livros, que foi traduzido para o francês em 1851 a partir de sua versão em árabe (não existe nenhuma versão deste livro em grego nem em latim). No Apêndice A apresentamos uma tradução completa deste trabalho.

O livro começa com uma definição e dois axiomas:

> "1. [Definição] Peso é a medida de uma coisa comparada com outra, em termos de pesado e leve, através de uma balança.
>
> 2. [Axioma I] Quando há um travessão reto de espessura uniforme, e são suspensos em suas extremidades dois pesos iguais, e o travessão é suspenso sobre um eixo no ponto médio entre os dois pesos, então o travessão ficará paralelo ao plano do horizonte.
>
> 3. [Axioma II] Quando dois pesos — iguais ou desiguais — são colocados nas extremidades de um travessão, e o travessão é suspenso por um eixo colocado sobre alguma posição do travessão tal que os dois pesos mantenham o travessão no plano do horizonte, então se um dos dois pesos for mantido em sua posição na extremidade do travessão e se for traçada a partir da outra extremidade do travessão uma linha reta fazendo um ângulo reto em relação ao travessão em qualquer direção,[1] e o outro peso for suspenso em qualquer ponto ao longo desta linha, então o travessão permanecerá paralelo ao plano do horizonte assim como antes.

[1] Isto é, esta linha reta ortogonal ao travessão pode ser vertical, horizontal ou então inclinada de um ângulo qualquer em relação à vertical.

Este é o motivo pelo qual o peso não é modificado quando a corda de um dos lados é encurtada e a corda do outro lado aumentada.

[Proposições] (...)"

O autor do trabalho apresenta então demonstrações de três proposições para então chegar na quarta e última proposição que contém a lei da alavanca. Nas Seções 9.5 e 9.6, e no Apêndice A, veremos este procedimento detalhado atribuído a Euclides.

Por hora seguiremos a modificação proposta por Pierre Duhem ao analisar este trabalho, [Duh05, págs. 65-66] e [Duh91, págs. 47 a 51]. Duhem postula mais dois axiomas, a saber (entre colchetes vão nossas palavras):

> "Axioma III: Se os pesos estão mantendo o travessão de uma balança paralela ao horizonte e se suspendemos um peso adicional no ponto de suspensão do travessão, o travessão permanece paralelo ao horizonte."
>
> "Axioma IV: Se qualquer número de pesos mantém o travessão de uma balança paralelo ao horizonte, e se Z e D são dois destes pesos [iguais entre si] suspensos do mesmo braço do travessão e se o peso Z é movido por uma certa distância se afastando do ponto de suspensão da balança e se o peso D é movido a mesma distância em direção ao ponto de suspensão, então o travessão permanecerá paralelo ao horizonte."

Estes axiomas levam a uma demonstração elegante da lei da alavanca. Ela pode ser resumida da seguinte maneira. Seja BD uma alavanca tendo o ponto C como seu ponto de suporte, com $BC = CD$, Figura 9.7.

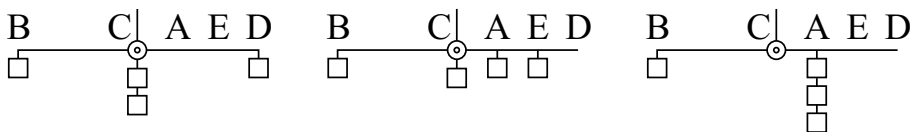



Figura 9.7: Demonstração de Duhem para a lei da alavanca.

Sejam quatro pesos iguais P, um dependurado em B, um em D e dois em C, ver a Figura 9.7a. Pelos axiomas I, II e III a alavanca ficará em equilíbrio, parada na horizontal. Dividimos CD em três partes iguais pelos pontos A e E, tal que $CA = AE = ED = CD/3$. Podemos mover um dos pesos que estava em C para o ponto A, movendo ao mesmo tempo o peso que estava em D para o ponto E, ver a Figura 9.7b. Pelo quarto axioma a alavanca permanecerá em equilíbrio na horizontal. Pelo quarto axioma ela vai continuar em equilíbrio se movermos o peso que havia permanecido em C para o ponto A, movendo ao mesmo tempo o peso que estava em E para o ponto A, ver a Figura 9.7c. Vemos então que a alavanca no estado final de equilíbrio terá um peso P à distância d do fulcro e outro peso $3P$ à distância $d/3$ do outro lado do fulcro.

Isto é, chegamos a um caso particular da lei da alavanca. É fácil generalizar esta demonstração.

Esta demonstração da lei da alavanca depende não apenas da condição de equilíbrio de pesos iguais a distâncias iguais do fulcro, mas também do axioma IV. Este não é um axioma óbvio. Ele só é justificado por estar de acordo com resultados experimentais. Suponha que a natureza se comportasse tal que a lei experimental da alavanca fosse, por exemplo, que houvesse equilíbrio quando

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0} \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{\alpha} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0} \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{\alpha} , \tag{9.6}$$

com $\alpha \neq 1$. Neste caso o axioma IV deixaria de ser verdade.

Como veremos na Seção 9.6 e no Apêndice A, o procedimento original atribuído a Euclides inclui apenas os dois primeiros axiomas. Ou seja, o axioma IV anterior, que foi suposto por Duhem, na verdade é derivado por Euclides a partir de seus dois axiomas iniciais.

9.5 Demonstração da Lei da Alavanca a partir de um Procedimento Experimental Atribuído a Euclides

Vamos fazer aqui algumas experiências que ilustram como se derivar a lei da alavanca de uma maneira bem interessante. As experiências que vamos descrever nos foram sugeridas pelo *Livro da Balança*, trabalho teórico atribuído a Euclides e que está traduzido no Apêndice A.

Até o momento temos lidado com alavancas compostas de travessões que podem girar em um plano vertical ao redor de um eixo horizontal. O procedimento que vamos adotar agora é diferente. Vamos utilizar um retângulo (ou quadrado) rígido que fica em equilíbrio em um plano horizontal, apoiado por um suporte vertical como uma vareta colocada sob o centro do retângulo. Vamos colocar três peças de mesmo peso P sobre o plano horizontal, estudando as condições em que o plano permanece em equilíbrio. O retângulo deve ser quadriculado, tal como um plano cartesiano, para facilitar a análise. Vamos colocar dois sistemas de eixos x e y paralelos aos lados do retângulo, com o centro $(0, 0)$ deste sistema de eixos sobre o centro do retângulo.

Material: O retângulo pode ser feito de cartolina e as linhas quadriculadas podem ser traçadas sobre ela. Outra alternativa é colar uma folha já quadriculada sobre a cartolina. As três peças que vão ser colocadas sobre ela podem ser três porcas iguais. Para evitar que elas fiquem escorregando sobre a cartolina e caindo ao solo, dificultando a realização das experiências, o ideal é passar um pouco de cola de bastão na parte inferior das porcas (ou colocar uma camada bem fina de massa de modelar), tal que seja fácil grudá-las em quaisquer pontos da cartolina. Outra alternativa bem interessante é utilizar um retângulo metálico (do tipo utilizado como porta retratos), sendo as peças os pequenos ímãs

iguais com os quais são presas as fotografias. Neste caso deve ser colada uma folha quadriculada sobre a chapa metálica. O tamanho do retângulo pode ser de, por exemplo, 10 cm × 15 cm. A separação entre as linhas quadriculadas pode ser de 0,5 cm ou de 1 cm, por exemplo. O suporte vertical que vai ser colocado sob o centro do retângulo pode ser um palito de churrasco, com a ponta para baixo fincada sobre um pedaço de massa de modelar. Pode ser também um vidro de corretor líquido ou outro suporte adequado. O importante é que a superfície superior plana do suporte (palito de churrasco, tampa do vidro etc.) não pode ser pequena demais senão o equilíbrio fica muito instável, mas também não pode ser grande demais pois neste caso fica difícil de estabelecer com precisão as condições que fornecem o equilíbrio das três peças. Como medida razoável pode ser utilizado um suporte tal que, estando o retângulo em equilíbrio com as três peças em posições adequadas sobre ele, o equilíbrio deixa de existir quando uma única peça é deslocada uma ou duas unidades de comprimento ao longo do eixo x ou do eixo y. Ou seja, tal que o sistema tombe do suporte quando isto ocorre, sendo isso facilmente detectado.

Vamos então supor que já temos nosso retângulo quadriculado. A primeira coisa a ser feita é equilibrá-lo na horizontal, apoiando-o sobre suporte colocado sob a origem (0, 0) do retângulo. Feito isto é importante equilibrar também o retângulo com as três peças, chamadas de P_1, P_2 e P_3, colocadas em $(x, y) =$ (-5, 0), (0, 0) e (5, 0), respectivamente, como na Figura 9.8. Como esta é uma situação simétrica, tem de ocorrer o equilíbrio. Caso isto não ocorra, deve ser encontrada a causa para isto antes de prosseguir com as experiências (pode ser devido ao fato de as três peças não terem o mesmo peso, ou de o suporte não estar colocado exatamente sob o centro do retângulo, ou ...).

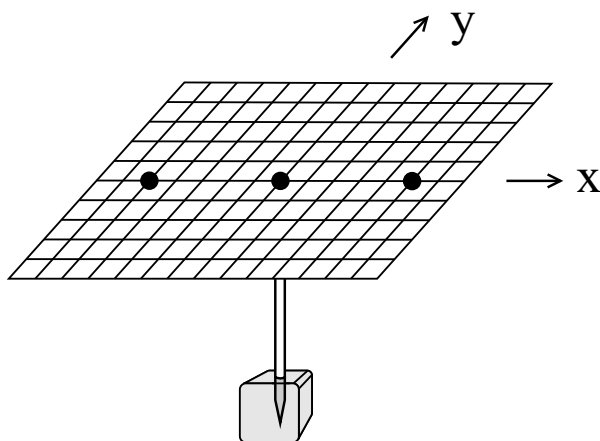



Figura 9.8: Um outro procedimento para obter a lei da alavanca.

Estamos então prontos para começar com as principais experiências.

Experiência 9.1

Desloca-se a peça P_2 que estava na origem para a posição (x, y) = (0, 2). Deve ser observado que o sistema tomba em direção a esta peça, com ela aproximando-se da Terra. Por outro lado caso a peça P_2 seja deslocada para (x, y) = (0, 2) e a peça P_1 seja deslocada para (x, y) = (-5, -2), com a peça P_3 mantida em sua posição (x, y) = (5, 0), soltando-se o sistema do repouso na horizontal, observa-se que o sistema permanece em equilíbrio na horizontal, como indicado na Figura 9.9.

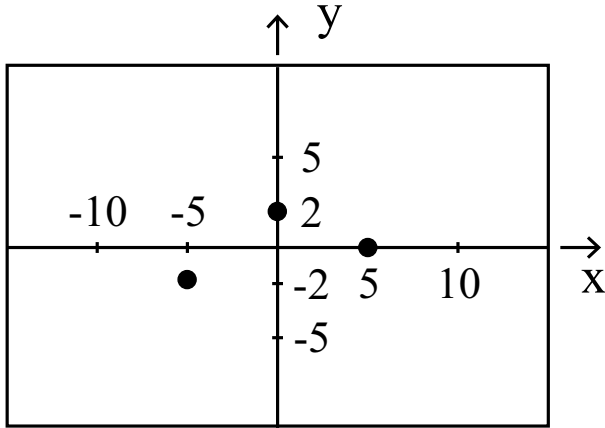



Figura 9.9: Condição experimental de equilíbrio quando este retângulo é apoiado na horizontal por uma vareta vertical colocada abaixo da origem.

O resultado desta experiência pode ser generalizado para outros casos. Ou seja, supomos que temos um conjunto de peças em equilíbrio sobre um plano horizontal apoiado sobre algum pequeno suporte vertical. Vamos considerar a posição do suporte como sendo a origem de um sistema de coordenadas ortogonais (x, y). Se deslocarmos uma das peças da posição (x_1, y_1) para a posição $(x_1 + d, y_1)$ e, simultaneamente, deslocarmos uma outra peça de mesmo peso da posição (x_2, y_2) para a posição $(x_2 - d, y_2)$, o sistema vai permanecer em equilíbrio. O mesmo equilíbrio vai ser mantido para deslocamentos iguais e em sentidos opostos feitos simultaneamente por duas peças de mesmo peso ao longo do eixo y, ou para deslocamentos iguais e opostos perpendiculares a qualquer outra reta passando pela origem do sistema de coordenadas e inclinada de um ângulo θ arbitrário em relação ao eixo x.

Experiência 9.2

Vamos agora inverter a ordem dos deslocamentos. Começamos com as três peças P_1, P_2 e P_3 em (x, y) = (-5, 0), (0, 0) e (5, 0), respectivamente. Deslocamos apenas a peça P_1 para (x, y) = (-5, -2). Agora observarmos atentamente o retângulo. Quando soltamos o sistema lentamente do repouso, o que se observa é que todo o lado com $y < 0$ tende a tombar aproximando-se da Terra, com o lado $y > 0$ afastando-se dela. Por outro lado, não há diferença entre os

lados $x > 0$ e $x < 0$, não havendo tendência de queda de nenhum destes lados, como indicado na Figura 9.10. E isto apesar da peça P_1 não estar localizada simetricamente em relação à origem do eixo x.

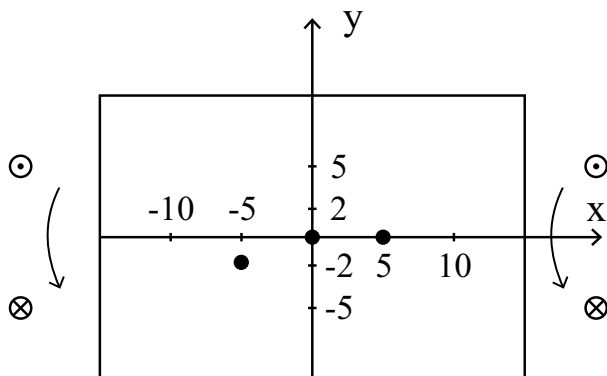



Figura 9.10: Direção de rotação do plano.

Podemos expressar esta descoberta da seguinte maneira. Suponha que temos um sistema rígido em equilíbrio em um plano horizontal podendo girar em qualquer sentido ao redor de um ponto, com vários corpos sobre o plano horizontal. Se apenas um dos corpos do sistema é deslocado no plano horizontal ao longo de uma certa direção, o sistema fica desequilibrado apenas nesta direção, tendendo a aproximar-se da Terra, sem se desequilibrar na direção perpendicular a este deslocamento. Esta experiência fornece um suporte empírico ao postulado II de Euclides apresentado anteriormente.

Experiência 9.3

Traçamos agora dois círculos de mesmo raio sobre o retângulo tal que se toquem em apenas um ponto. Se os círculos tiverem um raio de 5 unidades, por exemplo, os centros dos círculos podem estar localizados em $(x, y) =$ (-5, 0) e (5, 0). Neste caso o ponto de contato é a origem (0, 0). Vamos traçar a reta ACB passando pelos pontos $A =$ (8, -4), $C =$ (0, 0) e $B =$ (-8, 4). Chamamos de H e de T às extremidades dos círculos ao longo do eixo x, isto é, com $H =$ (-10, 0) e $T =$ (10, 0). Traçamos as três semi-retas paralelas HB, CE e AT, com E = (2, 4). As projeções de E e de A sobre o eixo x vão ser chamadas de Z e de W, tal que $Z =$ (2, 0) e $W =$ (8, 0), ver a Figura 9.11. Este retângulo fica em equilíbrio na horizontal ao ser apoiado com um suporte vertical colocado sob a origem.

Experiência 9.4

Colocamos três peças P_1, P_2 e P_3 de mesmo peso nas posições B, C e A. Por simetria o retângulo permanece em equilíbrio na horizontal ao ser apoiado sob a origem (0, 0), Figura 9.11.

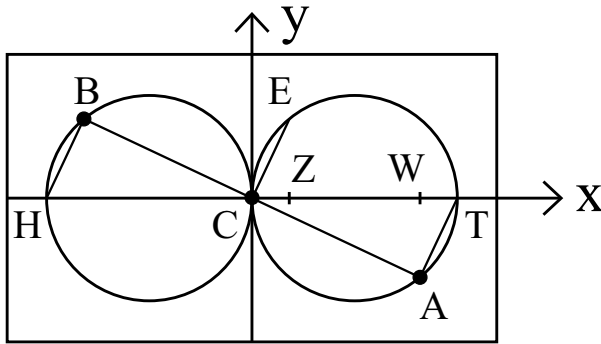



Figura 9.11: Procedimento de Euclides para derivar a lei da alavanca.

Deslocamos agora P_1 de B para H e P_2 de C para E, mantendo P_3 em A. Estes deslocamentos foram perpendiculares à reta BCA, tiveram o mesmo tamanho (o mesmo comprimento) e foram feitos em sentidos opostos no que se referem à reta BCA. Além disso, P_1 e P_2 têm o mesmo peso. Devido a isto o sistema permanece em equilíbrio, pelo que já vimos anteriormente, ver a Figura 9.12.

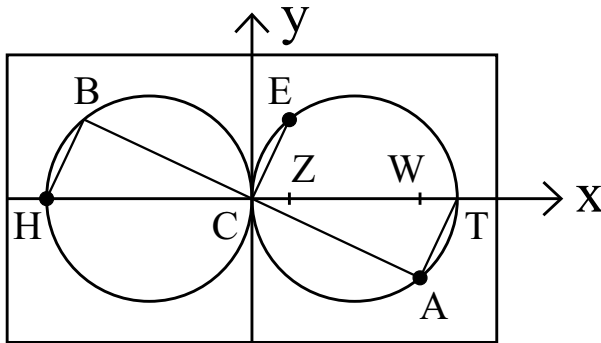



Figura 9.12: Segundo passo para derivar a lei da alavanca.

Experiência 9.5

Consideramos agora a reta HCT. Partimos da situação de equilíbrio com as três peças iguais em H, E e A. Deslocamos P_2 de E para Z, assim como P_3 de A para W, mantendo P_1 em H. Novamente os deslocamentos de dois pesos iguais foram de mesma magnitude e em sentidos opostos em relação à reta HCT, tal que o sistema permanece em repouso. Terminamos então com a situação de equilíbrio representada na Figura 9.13, com as três peças iguais em $H =$ (-10, 0), $Z =$ (2, 0) e $W =$ (8, 0).

Ao alterar a inclinação da reta BCA em relação ao eixo x, repetindo o procedimento anterior, terminaremos com as três peças iguais nas posições P_1

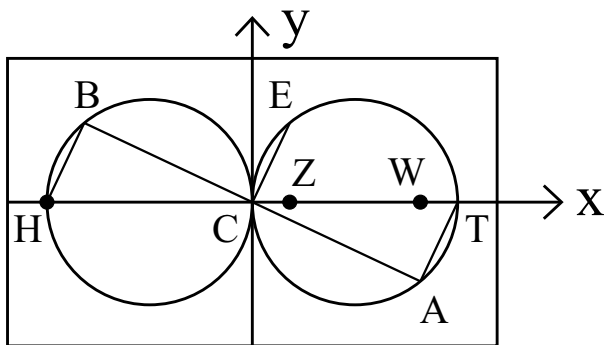



Figura 9.13: Terceiro passo para derivar a lei da alavanca.

= (-10, 0), $P_2 = (a, 0)$, $P_3 = (10 - a, 0)$, com a grandeza a podendo ter qualquer valor. Ou seja, concluímos que um peso em uma certa distância d da origem é equilibrado por outros dois pesos iguais a ele colocados do outro lado do fulcro nas distâncias a e $d - a$ da origem. Em particular, se começarmos com uma inclinação da reta BCA de 45° terminaremos com um peso na posição $(-10, 0)$ e dois outros pesos iguais a este na posição $(5, 0)$. Este é um caso particular da lei da alavanca para o qual $P_A/P_B = d_B/d_A = 2$.

Como vimos na Seção 9.2, a partir destes resultados é possível derivar experimentalmente a lei da alavanca.

O interessante deste procedimento experimental com planos é que não começamos com este último resultado. Em vez disso, ele foi derivado a partir do fato de que quando deslocamos uma peça por uma certa distância ao longo de uma direção do plano que estava originalmente em equilíbrio apoiado sobre um suporte vertical, o plano é desequilibrado apenas ao longo desta direção. Ou seja, este deslocamento não afeta o equilíbrio do plano em direções perpendiculares a este deslocamento.

9.6 Demonstração Teórica da Lei da Alavanca Atribuída a Euclides

Em um trabalho atribuído a Euclides, [Euc], traduzido no Apêndice A, deriva-se a lei da alavanca teoricamente ao se postular o resultado anterior que vinha da experiência. Como vimos anteriormente, o autor deste trabalho postula apenas dois axiomas, a saber:

> Axioma I: "Quando há um travessão reto de espessura uniforme, e são suspensos em suas extremidades dois pesos iguais, e o travessão é suspenso sobre um eixo no ponto médio entre os dois pesos, então o travessão ficará paralelo ao plano do horizonte."

> Axioma II: "Quando dois pesos — iguais ou desiguais — são colocados nas extremidades de um travessão, e o travessão é suspenso

por um eixo colocado sobre alguma posição do travessão tal que os dois pesos mantenham o travessão no plano do horizonte, então se um dos dois pesos for mantido em sua posição na extremidade do travessão e se for traçada a partir da outra extremidade do travessão uma linha reta fazendo um ângulo reto em relação ao travessão em qualquer direção, e o outro peso for suspenso em qualquer ponto ao longo desta linha, então o travessão permanecerá paralelo ao plano do horizonte assim como antes.

Este é o motivo pelo qual o peso não é modificado quando a corda de um dos lados é encurtada e a corda do outro lado aumentada.

[Proposições] (...)"

O ponto principal deste segundo axioma é o postulado de que o equilíbrio de um travessão na horizontal não é afetado quando um corpo desloca-se perpendicularmente a este travessão "em qualquer direção." Ou seja, se o travessão está em equilíbrio ao longo do eixo x, o corpo preso ao travessão pode deslocar-se de uma distância d ao longo do eixo vertical z, ou ao longo do eixo y, ou ao longo do plano yz, sem afetar o equilíbrio do travessão no sentido de fazer o eixo x girar. Isto é, este deslocamento do corpo no plano yz não vai fazer com que o lado $x > 0$ do travessão tenda a subir nem a descer aproximando-se da Terra, o mesmo acontecendo com o lado $x < 0$.

Estes dois postulados são apresentados da seguinte maneira no livro de Duhem, [Duh05, pág. 65] e [Duh91, pág. 50]:

"Axioma I: Quando dois pesos iguais estão suspensos nas duas extremidades de um travessão reto, de espessura uniforme, e quando o próprio travessão está suspenso pelo ponto que se encontra no ponto médio entre os dois pesos, em um braço da balança, o travessão permanece paralelo ao plano horizontal."

"Axioma II: Quando dois pesos iguais ou desiguais são aplicados às duas extremidades de um travessão, com este travessão estando suspenso em um braço da balança, através de um de seus pontos, de tal maneira que os dois pesos mantenham o travessão paralelo ao horizonte; e quando em seguida se deixa um dos dois pesos em seu lugar na extremidade do travessão; e quando se liga a partir da outra extremidade do travessão uma reta, formando com ele um ângulo reto, de qualquer lado que se queira; e quando se suspende o outro peso em um ponto qualquer ao longo desta reta; o travessão permanecerá paralelo ao plano do horizonte."

"É por este motivo que o peso não muda caso se encurte a corda de um dos dois pratos e caso se prolongue a corda do outro braço."

Como estes são axiomas, não podem ser derivados de outros postulados ou de outros axiomas. Eles são simplesmente postulados como verdade, sem explicação. A partir deles podem ser derivadas outras conseqüências.

Este segundo axioma teórico pode ser visualizado pelas experiências anteriores. A partir dele chega-se teoricamente depois de alguns passos mostrados na Seção 9.5 que um peso P na posição $x = -d$ é equilibrado por outros dois pesos iguais P colocados nas posições $x = a$ e $x = d - a$. Depois disto pode ser obtida a lei da alavanca como uma conseqüência adicional.

9.7 A Demonstração da Lei da Alavanca Apresentada por Arquimedes e o Cálculo do Centro de Gravidade de um Triângulo

9.7.1 A Demonstração da Lei da Alavanca por Arquimedes

Arquimedes apresenta uma dedução teórica da lei da alavanca em seu trabalho que tem como título: *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, ou *Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas*. No Apêndice B apresentamos uma tradução completa da primeira parte deste trabalho.

O que chegou até nós parece ser apenas parte de um trabalho maior. Sua demonstração da lei da alavanca é baseada no conceito do centro de gravidade, que não aparece definido explicitamente em nenhum de seus trabalhos ainda existentes. Mas pelo que vimos anteriormente pelas citações de Heron, Papus e Simplício, que tiveram acesso a obras de Arquimedes perdidas hoje em dia, parece que ele definiu este conceito da seguinte forma: O centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto, pertencente ao corpo ou localizado no espaço vazio, tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direção, qualquer que seja sua orientação inicial em relação à Terra.

O próprio Arquimedes afirma na Proposição 6 de seu trabalho *Quadratura da Parábola* que provou o seguinte resultado:

> "Todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical; pois esta proposição já foi demonstrada," [Mug71a, pág. 171], [Duh06, pág. 307] e [Duh91, pág. 463].

Este resultado é extremamente importante tanto do ponto de vista prático quanto teórico.

Esta proposição permite que se encontre na prática o CG de qualquer figura, como já vimos anteriormente em $CG6$ e $CG7$. Mas é interessante observar que para Arquimedes o cruzamento das verticais não é uma definição do CG, mas sim um resultado teórico derivado por ele. Infelizmente a demonstração original deste resultado de Arquimedes não chegou até nós, estando provavelmente em seu trabalho perdido *Sobre as Balanças*, ou *Sobre as Alavancas*.

Esquematizamos aqui as demonstrações apresentadas por Arquimedes da lei da alavanca e do CG de um triângulo. Ele começa o trabalho com sete postulados, a saber, [Mug71a, págs. 80 e 81]:

> Postulado 1: "Postulamos que pesos iguais se equilibram a distâncias iguais e que pesos iguais suspensos a distâncias desiguais não se equilibram, mas que se inclinam do lado do peso suspenso à maior distância."
>
> Postulado 2: "Quando pesos suspensos a certas distâncias estão em equilíbrio, se adicionarmos [algum corpo] a um dos dois pesos, os pesos não mais se equilibrarão, mas haverá uma inclinação do lado do peso ao qual foi adicionado [algum corpo]."
>
> Postulado 3: "Da mesma forma, se removermos qualquer coisa de um dos dois pesos [que se equilibravam a certas distâncias], os pesos não mais se equilibrarão, mas haverá uma inclinação do lado do peso do qual nada foi retirado."
>
> Postulado 4: "Nas figuras planas iguais e semelhantes, sobrepostas uma sobre a outra, os centros de gravidade também se sobrepõem um sobre o outro."
>
> Postulado 5: "Nas figuras planas desiguais, mas semelhantes, os centros de gravidade serão situados semelhantemente. Dizemos que pontos estão situados semelhantemente nas figuras semelhantes quando as linhas retas ligando estes pontos aos vértices dos ângulos iguais formam ângulos iguais com os lados homólogos."
>
> Postulado 6: "Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias."
>
> Postulado 7: "O centro de gravidade de toda figura cujo perímetro gira sua concavidade para o mesmo lado tem de estar no interior da figura."

O axioma fundamental que permite a Arquimedes derivar não apenas a lei da alavanca, mas também chegar a diversos resultados teóricos sobre a localização do CG de figuras planas (triângulos, paralelogramos, trapézios, círculos, semicírculos, áreas parabólicas) e volumétricas (cones, hemisférios, semi-elipsóides, parabolóides de revolução, hiperbolóides de revolução) é o sexto Postulado do seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, a saber: "Se grandezas a certas distâncias estão em equilíbrio, (outras) grandezas iguais a elas também vão estar em equilíbrio nas mesmas distâncias." Esta é a tradução para o português da versão em inglês apresentada por Heath, [Arc02, pág. 190]. A tradução para o português da versão em francês apresentada por Mugler é a seguinte: "Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias," [Mug71a, pág. 80].

O significado deste postulado crucial foi esclarecido por Vailati, Toeplitz, Stein, [Ste30], e Dijksterhuis, [Dij87, págs. 289-304 e 321-322]. O ponto principal, que concorda com a maneira implícita com que Arquimedes utiliza este postulado em suas deduções, é que por "grandezas a certas distâncias," Arquimedes quer dizer "grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro." E por "grandezas equivalentes," Arquimedes quer dizer "grandezas de mesmo peso." Ou seja, este postulado permite a Arquimedes substituir um corpo A dependurado em uma alavanca através de seu centro de gravidade localizado à distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro, por outro corpo B conveniente que tenha o mesmo peso que A, sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que o CG deste corpo B também seja dependurado na balança à mesma distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro. Em vez de corpos A e B pode-se pensar também em um conjunto de N corpos A_i e de M corpos B_j. Isto é, pode-se substituir o conjunto de N corpos A_i pelo conjunto de M corpos B_j, sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que o peso do conjunto de N corpos A_i seja igual ao peso do conjunto de M corpos B_j, e que o CG do conjunto de N corpos A_i esteja atuando à mesma distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro que o CG do conjunto de M corpos B_j.

Um caso particular deste postulado é a substituição de um peso P localizado à distância d do plano vertical passando pelo fulcro de uma alavanca em equilíbrio, por um conjunto de outros dois corpos, a saber: um peso $P/2$ localizado à distância $d+x$ do plano vertical passando pelo fulcro e um outro peso $P/2$ localizado à distância $d-x$ do plano vertical passando pelo fulcro. Neste caso os dois sistemas possuem a mesma grandeza, ou seja, o mesmo peso $P/2 + P/2 = P$. Além disso, os centros de gravidade dos dois sistemas estão situados à mesma distância d do plano vertical passando pelo fulcro. No caso do segundo sistema composto dos dois pesos $P/2$, isto foi demonstrado por Arquimedes na quarta Proposição deste seu trabalho, a saber, [Mug71a, pág. 82]: "Se dois pesos iguais não têm o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade de ambos tomados conjuntamente está no ponto central da linha ligando seus centros de gravidade." E a partir deste caso particular pode-se chegar facilmente na lei da alavanca, como já vimos no procedimento atribuído a Euclides. Arquimedes apresenta uma demonstração geral da lei da alavanca válida não apenas para grandezas comensuráveis mas também para grandezas incomensuráveis.

A vantagem deste postulado de Arquimedes em relação ao postulado análogo implícito no procedimento atribuído a Euclides é a generalidade adotada por Arquimedes. Foi ao utilizar este sexto Postulado de maneira engenhosa que ele conseguiu chegar não apenas na lei da alavanca, mas também calcular corretamente o centro de gravidade de todas as figuras filiformes, planas e volumétricas mencionadas anteriormente.

Para demonstrar a lei da alavanca Arquimedes considera três situações. (A) Um conjunto de $2N_1$ grandezas de mesmo peso P presas por seus centros de gravidade ao longo de uma alavanca retilínea, com estas grandezas igualmente espaçadas entre si. Vamos aqui dar um exemplo concreto com $N_1 = 3$ e com o espaçamento entre as grandezas sendo dado pelo comprimento w. O CG deste conjunto de grandezas é o ponto E, que está no ponto médio entre as

grandezas, ver Figura 9.14a. Esta é a situação (A) com a alavanca podendo girar ao redor do fulcro E. (B) Um conjunto de $2N_2$ grandezas de mesmo peso P presas por seus centros de gravidade ao longo de uma alavanca retilínea, com estas grandezas igualmente espaçadas entre si. Vamos dar aqui um exemplo concreto com $N_2 = 2$ e com o espaçamento entre as grandezas sendo dado pelo comprimento w. O CG deste conjunto de grandezas é o ponto $\triangle$, que está no ponto médio entre as grandezas, ver a Figura 9.14b. Esta é a situação (B) com a alavanca podendo girar ao redor do fulcro $\triangle$. (C) Um conjunto de $2N_1 + 2N_2$ grandezas de mesmo peso P presas por seus centros de gravidade ao longo de uma alavanca retilínea, com estas grandezas igualmente espaçadas entre si. Vamos dar aqui um exemplo concreto com $N_1 = 3$, $N_2 = 2$ e com o espaçamento entre as grandezas sendo dado pelo comprimento w. O CG deste conjunto de grandezas é o ponto Γ, que está no ponto médio entre as grandezas, ver a Figura 9.14c. Esta é a situação (C) com a alavanca podendo girar livremente ao redor do fulcro Γ. Por simetria vem que estas três situações são de equilíbrio.

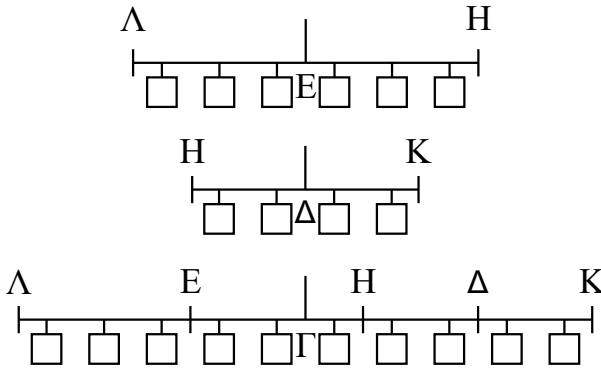



Figura 9.14: Procedimento de Arquimedes para demonstrar a lei da alavanca.

Que o CG destas três situações está nos pontos E, $\triangle$ e Γ, respectivamente, foi demonstrado por Arquimedes no Corolário II da Proposição 5 de seu trabalho. Mas isto não depende da lei linear da alavanca usual. Isto é, este resultado pode ser demonstrado por simetria, mesmo que a lei da alavanca fosse do tipo

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0} \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{\alpha} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0} \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{\alpha} , \tag{9.7}$$

com $\alpha = 1$ ou com $\alpha \neq 1$. Ou seja, suponha que experimentalmente se descobrisse que a alavanca só fica em equilíbrio quando vale a Equação (9.7) com algum valor específico de α. Ainda assim o CG destas três situações estaria, respectivamente, nos pontos E, $\triangle$ e Γ, qualquer que fosse o valor de α. E por simetria vem que estas três alavancas permaneceriam em equilíbrio ao serem soltas do repouso, qualquer que fosse o valor de α.

Mas agora vem a utilização crucial do Postulado 6 apresentado anteriormente. Este postulado permite que na terceira situação já apresentada, Figura

9.14c, o conjunto de $2N_1$ corpos possa ser substituído por um único corpo de peso $P_A = 2N_1P$ atuando no ponto E, como mostrado na Figura 9.15a, que vamos chamar de situação (D). Isto é, se a situação (C) era de equilíbrio, então pelo sexto Postulado vem que a situação (D) continuará sendo de equilíbrio, com a alavanca podendo girar livremente ao redor do fulcro Γ. Também é possível substituir o conjunto de $2N_2$ corpos por um corpo de peso $P_B = 2N_2P$ atuando no ponto $\triangle$, como mostra a Figura 9.15b, que vamos chamar de situação (E). Ou seja, o Postulado 6 garante que como a situação (C) anterior era de equilíbrio, este equilíbrio será preservado ao passar para a situação (D) e também para a situação (E), com a alavanca podendo girar livremente ao redor do fulcro Γ.

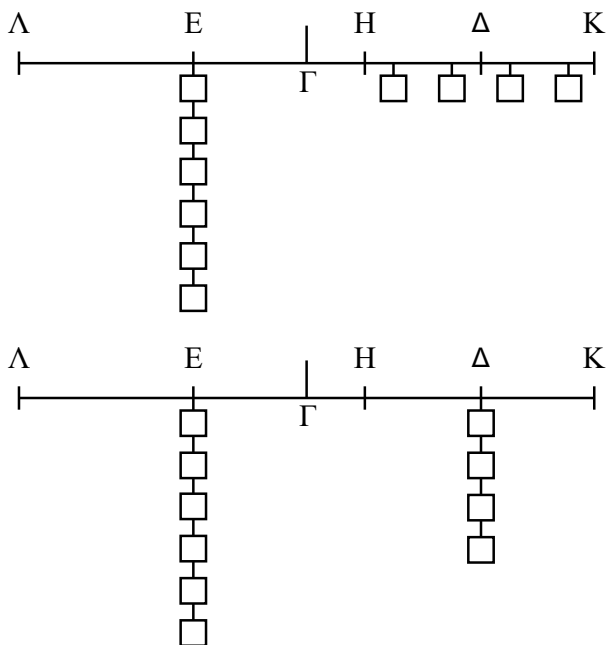



Figura 9.15: Segundo e terceiro passos no procedimento de Arquimedes para demonstrar a lei da alavanca.

E esta situação (E) é a lei da alavanca, pois o peso P_A está para o peso P_B assim como a distância $\triangle\Gamma$ está para a distância $E\Gamma$.

Suponha agora que a natureza se comportasse tal que a lei da alavanca fosse do tipo da Eq. (9.7), com $\alpha \neq 1$. Ou seja, que a alavanca só ficasse em equilíbrio quando valesse esta igualdade. Ainda assim as condições (A), (B) e (C) seriam de equilíbrio. Mas, neste caso, não seria possível passar da situação (C) para a situação (D), nem para a situação (E), mantendo o equilíbrio da alavanca, já que as situações (D) e (E) não seriam de equilíbrio nesta situação hipotética. Isto mostra que nesta situação hipotética o Postulado 6 de Arquimedes deixaria de ser válido.

9.7.2 Cálculo do CG de um Triângulo por Arquimedes

Vamos agora analisar alguns aspectos do cálculo do CG de um triângulo apresentado por Arquimedes. Este CG coincide com o encontro das medianas, que são as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos. A importância deste resultado é que ele só vale para uma lei da alavanca linear com a distância. Por outro lado, o CG de um círculo ou de um retângulo continuaria sendo o centro geométrico destas figuras mesmo se a lei da alavanca fosse quadrática ou cúbica nas distâncias, como pode ser visto por argumentos de simetria. Logo, o cálculo do CG de um triângulo é o primeiro resultado não trivial encontrado para uma figura plana.

Arquimedes considera um triângulo escaleno genérico $AB\Gamma$. Mostra então na Proposição 13 que o CG tem de estar ao longo da linha reta unindo qualquer vértice ao ponto médio do lado oposto. Se $\triangle$ é o ponto médio do lado $B\Gamma$ no triângulo representado na Figura 9.16, isto significa que o CG tem de estar em algum ponto G ao longo da reta $A\triangle$. Arquimedes apresenta duas demonstrações para este fato. As duas demonstrações supõem que o CG não esteja ao longo de $A\triangle$, chegando então em uma contradição lógica. Logo, o CG tem de estar ao longo de $A\triangle$, que é o que ele queria demonstrar.

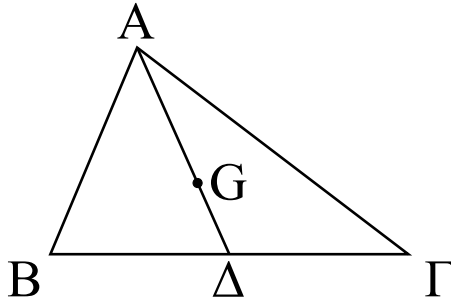



Figura 9.16: Centro de gravidade de um triângulo.

Vamos explorar aqui o aspecto inverso. Vamos supor que o CG esteja em algum ponto G ao longo de $A\triangle$, para ver não apenas que com isto se chega a algo logicamente coerente, mas também à relação entre AG e $G\triangle$. Esperamos com esta análise simplificada auxiliar na compreensão da demonstração de Arquimedes. Apresentamos explicitamente todos os postulados que estão sendo usados na demonstração.

Pelo Postulado 7 vem que o CG tem de estar dentro do triângulo $AB\Gamma$. Vamos supor então que ele esteja em um ponto G ao longo da reta $A\triangle$, onde $\triangle$ é o ponto médio do lado $B\Gamma$. Vamos chamar de E ao ponto médio do lado AB e de Z ao ponto médio do lado $A\Gamma$. Unimos os segmentos $E\triangle$, $Z\triangle$ e EZ. O segmento $E\triangle$ é paralelo ao lado $A\Gamma$, o segmento EZ é paralelo ao lado $B\Gamma$ e o segmento $Z\triangle$ é paralelo ao lado AB. Com isto vem então que $B\triangle = \triangle\Gamma = EZ = B\Gamma/2$, $BE = EA = Z\triangle = BA/2$, $AZ = Z\Gamma = E\triangle = A\Gamma/2$. Ficamos então com quatro triângulos iguais: $EB\triangle$, $Z\triangle\Gamma$, AEZ e $\triangle ZE$, ver a Figura 9.17. Estes

quatro triângulos são semelhantes ao triângulo original $AB\Gamma$. As áreas e os pesos P de cada um deles valem um quarto da área e do peso do triângulo original: $P_{EB\triangle} = P_{Z\triangle\Gamma} = P_{AEZ} = P_{\triangle ZE} = P_{AB\Gamma}/4$.

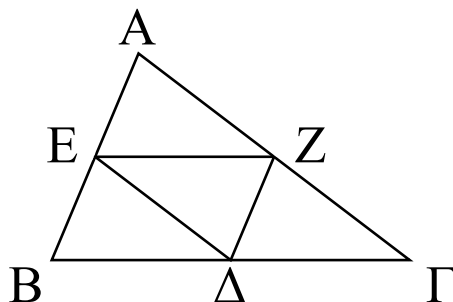



Figura 9.17: Passo intermediário para encontrar o CG de um triângulo.

Vamos chamar de M ao ponto médio do segmento EZ, que também é o ponto médio do segmento $A\triangle$. Chamamos ainda de M_1 ao ponto médio do segmento $B\triangle$ e de M_2 ao ponto médio do segmento $\triangle\Gamma$. Ligamos os pontos EM_1, ZM_2 e $A\triangle$. Pelo Postulado 5 vem que os centros de gravidade dos triângulos $EB\triangle$, $Z\triangle\Gamma$, AEZ e $\triangle ZE$ estarão nos pontos G_1, G_2, G_3 e G_4 ao longo dos segmentos EM_1, ZM_2, AM e $\triangle M$, respectivamente, situados tal que $EG_1 = ZG_2 = AG_3 = \triangle G_4 = AG/2$, como na Figura 9.18.

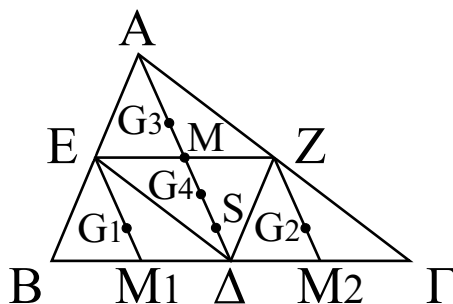



Figura 9.18: Passo final para encontrar o CG de um triângulo.

Pelos postulados 1 e 6 vem que se o triângulo $AB\Gamma$ ficava em equilíbrio ao ser apoiado pelo ponto G, então ele continuará equilibrado sendo apoiado no ponto G ao substituirmos os dois triângulos $EB\triangle$ e $Z\triangle\Gamma$ por um único corpo de peso igual à soma do peso destes dois triângulos atuando no ponto médio da reta G_1G_2. Vamos chamar este ponto médio de S, localizado ao longo de $A\triangle$. De fato, Arquimedes demonstra na Proposição 4 deste trabalho o seguinte resultado, [Mug71a, pág. 82]: "Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas."

Da mesma forma, podemos substituir os dois triângulos AEZ e $\triangle ZE$ por um único corpo de peso igual à soma do peso destes dois triângulos atuando no ponto médio do segmento G_3G_4, isto é, no ponto M. Ou seja, o sistema vai continuar em equilíbrio ao ser apoiado no ponto G depois desta substituição.

Ficamos então apenas com dois pesos iguais atuando em M e em S. Novamente podemos substituir estes dois pesos por um único corpo que terá o peso total do triângulo original atuando no ponto médio do segmento MS, que é o CG do triângulo original, ou seja, o ponto G. Pelo Postulado 5 temos que $S\triangle = G_1M_1 = G_2M_2 = G_3M = G_4M = G\triangle/2$. Como G é o ponto médio do segmento MS, temos que $G\triangle = (M\triangle + S\triangle)/2$. Combinando estas duas últimas igualdades, obtemos: $G\triangle = (M\triangle + G\triangle/2)/2$. Isto é, $2G\triangle - G\triangle/2 = 3G\triangle/2 = M\triangle$. Como $M\triangle = A\triangle/2$, obtemos finalmente: $A\triangle = 3G\triangle$. Como $A\triangle = AG + G\triangle$ vem também que $AG = 2G\triangle$.

Podemos então concluir que a suposição de que o CG do triângulo está ao longo da linha reta ligando cada vértice ao ponto médio do lado oposto é coerente. Além disto, o procedimento anterior mostra que o CG dado pelo ponto G vai dividir esta reta $A\triangle$ de tal forma que $AG = 2G\triangle$.

Por outro lado, como $\triangle G_4 = AG/2$, vem deste último resultado que $\triangle G_4 = (2G\triangle)/2 = \triangle G$. Ou seja, o CG do triângulo $\triangle ZE$, que é o ponto G_4, coincide com o CG do triângulo original $AB\Gamma$, que é o ponto G.

Agora que já apresentamos a demonstração de Arquimedes da lei da alavanca e nossa formulação dos passos que ele utilizou, gostaríamos de voltar atrás no que dissemos quando publicamos nossa primeira tradução para o português deste trabalho de Arquimedes, a partir da tradução para o inglês de Heath, [Ass97]. Ernst Mach (1838-1916) havia criticado fortemente a dedução de Arquimedes dizendo que era ela falha pois Arquimedes teria utilizado em sua demonstração a própria lei que queria demonstrar, [Mac60, págs. 13-20]. Em nossa primeira tradução afirmamos que concordávamos plenamente com Mach nesta crítica.

Em sua crítica Mach afirma que Arquimedes partiu de apenas dois postulados para chegar na lei da alavanca: (A) Grandezas de pesos iguais agindo a distâncias iguais (do ponto de apoio) ficam em equilíbrio. (B) Grandezas de pesos iguais agindo a distâncias desiguais (do ponto de apoio) não ficam em equilíbrio, sendo que a grandeza que atua na distância maior desce em direção à Terra. Mach apresenta então um esquema simplificado da demonstração de Arquimedes. Este esquema pode ser entendido pela Figura 9.19, [Mac60, pág. 16].

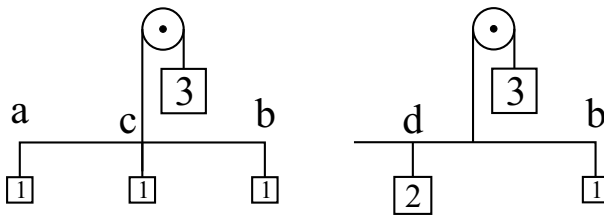



Figura 9.19: Crítica de Mach ao trabalho de Arquimedes

Três pesos iguais de uma unidade são dependurados nos pontos a, b e c de um travessão livre para girar ao redor do ponto c. Estes três pesos são equilibrados por um peso de três unidades, desprezando o peso do travessão. Como $ac = cb$ vem por simetria que o travessão permanece em equilíbrio na horizontal, Figura 9.19a. Mach então afirma que Arquimedes conclui baseado apenas nos dois postulados iniciais que a situação da Figura 9.19b também vai ser de equilíbrio, substituindo os dois pesos em a e em c por um único peso de duas unidades atuando no ponto d, que é o ponto médio de ac. As críticas de Mach (págs. 19 e 20) são de que Arquimedes teria usado implicitamente a lei da alavanca, que é o que ele queria demonstrar. Em nossa primeira tradução de Arquimedes afirmamos o seguinte, [Ass97, pág. 83]: "Antes de apresentar a tradução, queremos chamar a atenção para a crítica, extremamente importante, feita por Ernst Mach (1838-1916) a este trabalho de Arquimedes. Mach foi o primeiro a mostrar que a demonstração de Arquimedes da lei da alavanca é falha: (Mach, 1960, págs.19-28). Concordo plenamente com Mach nesta crítica."

Agora que realizamos todas as experiências descritas neste livro, que estudamos bem mais profundamente a obra de Arquimedes, que realizamos a nova tradução mais completa apresentada a seguir, e que analisamos com cuidado os comentários de Stein, [Ste30], e de Dijksterhuis, [Dij87, págs. 17, 47-8, 289-304, 315-6, 321-2 e 435-6], temos de voltar atrás neste comentário. Hoje em dia achamos que a demonstração de Arquimedes é correta. Ele não parte apenas dos dois postulados (A) e (B) apresentados por Mach. Ele parte de sete postulados. Entre estes, utiliza o sexto Postulado fundamental para chegar não apenas na lei da alavanca mas também nos cálculos corretos dos centros de gravidade de diversas figuras planas e volumétricas, como já analisamos. É este sexto Postulado que permite afirmar, por exemplo, que a situação da Figura 9.19b vai continuar sendo uma configuração de equilíbrio, assim como a situação da Figura 9.19a. Mach não percebeu a importância e o significado deste sexto Postulado.

Consideramos estes trabalhos de Arquimedes como sendo algumas das maiores obras científicas que a humanidade já produziu.

Apêndice A

Tradução Comentada do *Livro sobre a Balança*, Atribuído a Euclides

A.1 Comentários Gerais sobre esta Obra Atribuída a Euclides

Euclides viveu ao redor de 300 a.C. e publicou o famoso livro de geometria *Os Elementos*, [Euc56]. Embora a antiguidade grega não atribua nenhum trabalho de mecânica a Euclides, vários autores árabes mencionam que ele publicou trabalhos sobre estática. Existe, em particular, um *Livro sobre a Balança*, atribuído a Euclides. Não se conhece o original grego deste trabalho, apenas uma versão em árabe, que foi publicada em 1851 juntamente com uma tradução para o francês realizada por Woepcke. Em 1979 Clagett publicou uma tradução do árabe para o inglês, [Euc]. A tradução que apresentamos aqui foi baseada nesta versão em inglês. Os termos entre colchetes, assim como as notas de rodapé, são nossos (algumas vezes adaptados de Clagett) para facilitar a compreensão de alguns termos.

A.2 Tradução do *Livro sobre a Balança*, Atribuído a Euclides

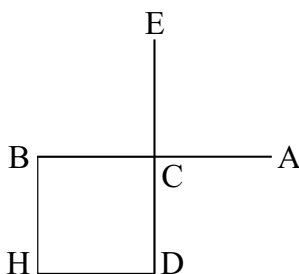
1. [Definição] Peso é a medida de uma coisa comparada com outra, em termos de pesado e leve, através de uma balança.

2. [Axioma I] Quando há um travessão reto de espessura uniforme, e são suspensos em suas extremidades dois pesos iguais, e o travessão é suspenso sobre um eixo no ponto médio entre os dois pesos, então o travessão ficará paralelo ao plano do horizonte.

3. [Axioma II] Quando dois pesos — iguais ou desiguais — são colocados nas extremidades de um travessão, e o travessão é suspenso por um eixo colocado sobre alguma posição do travessão tal que os dois pesos mantenham o travessão no plano do horizonte, então se um dos dois pesos for mantido em sua posição na extremidade do travessão e se for traçada a partir da outra extremidade do travessão uma linha reta fazendo um ângulo reto em relação ao travessão em qualquer direção,[1] e o outro peso for suspenso em qualquer ponto ao longo desta linha, então o travessão permanecerá paralelo ao plano do horizonte assim como antes.

Este é o motivo pelo qual o peso não é modificado quando a corda de um dos lados é encurtada e a corda do outro lado aumentada.

[Proposições]

4. [Proposição 1] Assumindo isto, supomos a linha reta AB como sendo o travessão de uma balança com eixo [ou fulcro] no ponto C, e traçamos CE fazendo um ângulo reto com a linha AB, e a estendemos em uma linha reta até o ponto D, e fazemos a linha CD igual a CE, e completamos o quadrado CH traçando as paralelas.[2] Colocamos então pesos iguais nos pontos A, H, e E.

Afirmo então que estes três pesos vão manter as linhas AB e ED paralelas ao horizonte (isto é, em equilíbrio).[3]

Demonstração disto: Um peso foi colocado sobre uma das extremidades da linha AB no ponto A. A partir da outra extremidade traçamos uma linha ortogonal, a linha BH, e colocamos sobre ela um peso igual ao peso que está no ponto A. E assim os dois pesos mantêm a linha AB paralela ao horizonte [pelo Axioma II]. Pelo mesmo motivo é necessário que os dois pesos que estão nos pontos E e H mantenham a linha ED paralela ao horizonte. Assim os pesos A,

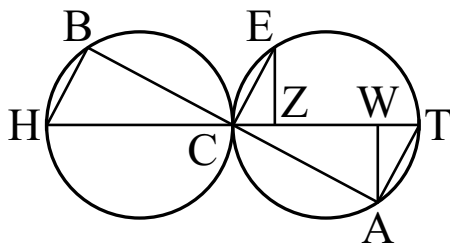
[1] Isto é, esta linha reta ortogonal ao travessão pode ser vertical, horizontal ou então inclinada de um ângulo qualquer em relação à vertical. Esta linha reta está em um plano ortogonal ao travessão.

[2] Isto é, o segmento HD paralelo a BC e o segmento HB paralelo a DC.

[3] O ponto importante a observar é que esta figura está no plano horizontal. Pode-se então pensar que tem um plano rígido apoiado sobre um suporte vertical colocado em C e suportando os pesos iguais em A, H, e E. Ou então pode-se pensar nas linhas AB, ED, HD e HB como sendo uma estrutura rígida idealizada, sem peso, situada em um plano horizontal e apoiada por um suporte vertical colocado sob C. Esta estrutura estaria suportando os pesos iguais colocados em A, H, e E. Embora seja afirmado que CH é um quadrado, isto é, que $CD = CB$, a demonstração que segue funciona igualmente bem caso CH seja um retângulo, com $CD \neq CB$.

E, e H vão manter as linhas AB e ED paralelas ao horizonte.

É claro que se o peso que está no ponto H for removido para o ponto B a partir do qual foi traçada a linha BH ortogonalmente,[4] então com o peso A ele manterá a linha AB paralela ao horizonte, assim como foi necessário no caso em que o peso estava no ponto H. De acordo com isto, a linha ED não estará em equilíbrio, pois o peso E fará com que ela se incline para seu lado. Mas se o peso E for removido para o ponto C, ou se o peso E for mantido em seu lugar e se for colocado um peso igual a ele no ponto D, então o peso E equilibrará a linha ED e ela ficará paralela ao horizonte. Concluímos a partir disso que o peso que está no ponto H era um peso que substituía dois pesos nos pontos B e D, cada um deles igual a ele.[5]

5. [Proposição 2] Assumindo isto, supomos a linha TH, e a dividimos em duas partes [iguais] no ponto C, e descrevemos sobre as linhas TC e CH dois círculos TEC e CBH no mesmo plano.[6] E o ponto C será considerado o eixo [ou fulcro] da balança. Vamos considerar duas linhas iguais CZ e TW, e vamos traçar duas linhas WA e ZE perpendiculares à linha TH. E traçamos as linhas TA e CE. Traçamos a linha ACB ao longo de uma linha reta. Traçamos a linha BH. Colocamos então três pesos iguais nos pontos A, E, H.

Sabe-se então a partir do que já demonstramos que estes três pesos manterão as duas linhas AB e EC paralelas ao horizonte, assim como o plano dos dois círculos e todas as linhas descritas neste plano. É claro que se o peso que está em A for movido para o ponto W a partir do qual a linha WA é traçada perpendicularmente à linha TH, a linha TH permanecerá paralela ao horizonte [pelo postulado II], e os planos dos dois círculos vão se inclinar na direção do peso E. Logo, se o peso E for movido para o ponto Z a partir do qual [a linha] ZE foi traçada perpendicularmente à linha TH, então [pelo postulado II] tanto a linha TH quanto os planos dos dois círculos permanecerão paralelos ao horizonte. Já é evidente [pelo que acabou de ser visto] que se a linha TH for dividida em duas partes [iguais] por C, e se o ponto C for o eixo [ou fulcro] da balança, e um peso for colocado em uma de suas extremidades, a saber, no ponto H, e se a linha CZ for considerada igual à linha TH, e se dois pesos,

[4]Ortogonalmente à linha AB.

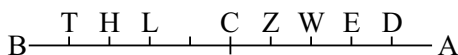
[5]Isto é, podemos substituir um peso P colocado em H por um outro peso P colocado em B, juntamente com um outro peso P colocado em D, que ainda assim o sistema permanecerá em equilíbrio.

[6]Novamente este plano será considerado como sendo horizontal.

cada um deles igual ao peso H, forem colocados nos pontos Z e W, então os três pesos manterão a linha TH paralela ao horizonte.

Da mesma forma demonstramos que se o peso colocado no ponto Z for afastado do eixo [ou fulcro] de um certo valor em direção a W, e se o peso que está em W for trazido para mais próximo do eixo pela mesma distância, então a linha TH permanecerá paralela ao horizonte, equilibrando os pesos.

6. [Proposição 3] Assumindo isto, supomos a linha AB como um travessão de uma balança, e o dividimos em duas partes [iguais] no ponto C, e fazemos o ponto C como sendo o eixo [ou fulcro da balança]. Dividimos a linha AC em tantas partes iguais quantas quisermos. E, assim, fazemos cinco divisões nos pontos D, E, W, e Z. Dividimos a linha CB em grandezas semelhantes nos pontos T, H, L ... É conhecido a partir do que já deduzimos que quando são considerados três pesos iguais nos pontos D, Z, B, então os pesos mantêm a linha AB paralela ao horizonte. Mas o excesso da linha CB em relação à linha DC é aquilo em virtude do qual o peso B excede o valor do peso D, e é TB.[7] E, além disso, TB tem o mesmo comprimento que ZC, e já foi evidenciado que ele [ou seja, TB] é igual a ele [ou seja, ZC] na força do peso.[8, 9]

T H L C Z W E D
B A

Movemos então o peso D para o ponto E, assim como movemos o peso B para o ponto T, e deixamos o peso Z em seu lugar. Então os três pesos, de acordo com o que já demonstramos anteriormente, mantêm a linha AB paralela ao horizonte. E o excesso [da linha] TC em relação [à linha] CE é TH, e TH tem o mesmo comprimento que ZC, e ZC é igual a TH em força de peso, como demonstramos. E então ZC é igual a TB em força de peso. Assim, TB é igual a TH em força de peso.

Da mesma forma demonstramos que todas as quantidades que são removidas da linha CB e que possuem o mesmo comprimento são iguais em força de peso. É claro então que a diminuição da força de peso quando o peso é movido de B para T é igual à diminuição que ocorre quando um peso é movido de T para H. O mesmo raciocínio se aplica a todas as quantidades de mesmo comprimento

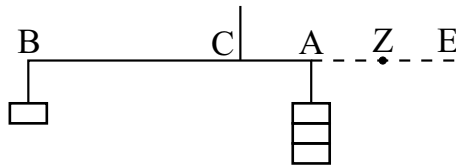
[7]Embora os pesos colocados em D, Z, e B tenham, por hipótese, o mesmo valor, quando se afirma que o peso B excede em valor ao peso D, o que se parece querer dizer é que por ele estar mais afastado do fulcro, ele exerce um torque maior do que o torque exercido pelo peso D no sentido de girar a balança. O que se está afirmando aqui é que o torque exercido por um peso, ou seja, o poder de um certo peso de girar uma balança, é proporcional à distância deste peso ao fulcro da balança.

[8]Foi mostrado na Proposição anterior que um peso P colocado à distância d do fulcro de uma balança é equilibrado por outros dois pesos iguais de mesmo valor P colocados do outro lado da balança nas distâncias x e $d-x$ do fulcro.

[9][Nota de Clagett, [Euc, pág. 29, nota 6]:] Na Proposição 3 o autor introduz um conceito que chama de "força do peso." Ele conclui aqui que comprimentos iguais do travessão são iguais em "força do peso." E assim quando um peso igual é deslocado em uma unidade de distância em direção ao fulcro sobre um lado da balança, a mesma diminuição é produzida assim como no caso em que ele é deslocado uma outra unidade de distância em direção ao fulcro.

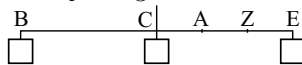
removidas de CB.[10]

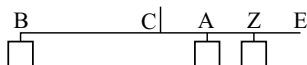
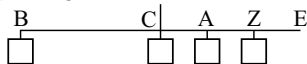
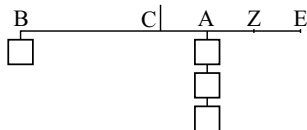
7. [Proposição 4] Quando se considera o travessão de uma balança e ele é dividido em segmentos [de comprimentos] desiguais e o eixo [ou fulcro] do travessão está no ponto de divisão, e são considerados dois pesos — a razão de um peso para o outro peso sendo igual à razão entre os segmentos do travessão — e o peso mais leve é suspenso sobre a extremidade do segmento mais comprido e o peso maior é suspenso sobre a extremidade do segmento mais curto, então o travessão fica equilibrado em peso e fica paralelo ao horizonte.[11]

Exemplo: O travessão AB é dividido no ponto C em dois segmentos [de comprimentos] desiguais, e são suspensos dois pesos nos pontos A e B, e a razão do peso A para o peso B é igual à razão da distância CB para a distância CA. Afirmo então que os dois pesos A e B mantêm o travessão AB paralelo ao horizonte.

Demonstração: Aumentamos o comprimento CA pela quantidade AE de tal forma que EC fique igual a CB. Vamos supor que a distância EC seja o triplo da distância AC. Assim quando o peso A é removido, e um peso igual ao peso B é colocado no ponto E, e um outro peso igual ao peso B é colocado no ponto C, o travessão EB fica equilibrado.[12] Sabe-se pelo que foi mostrado anteriormente que o movimento do peso E para o ponto Z, e o movimento [simultâneo] do peso C para o ponto A, mantêm o travessão EB equilibrado.[13] E como, se adicionamos ao ponto A um outro peso igual ao primeiro, sua força será como a força do primeiro, segue-se disto que se o peso Z que estava no ponto E for

[10]Nesta Proposição o autor introduz um conceito que chama de "força do peso." Este conceito seria uma medida da tendência de um certo peso em girar o travessão de uma balança, sendo que o autor conclui que esta tendência é proporcional à distância do peso em relação ao fulcro. Ele conclui que comprimentos iguais do travessão possuem a mesma "força de peso," não interessando a que distância que estejam estes comprimentos do fulcro da balança. Assim, quando um peso P desloca-se uma unidade de distância em relação ao fulcro (indo de B para T, por exemplo), a diminuição que ocorre na "força deste peso" é igual à diminuição que ocorre quando este mesmo peso desloca-se mais uma unidade de distância em relação ao fulcro (indo agora de T para H). É como se o autor estivesse querendo dizer que o torque diminuísse do mesmo valor tanto no caso em que o peso P vai do ponto B para T, quanto no caso em que o peso P vai do ponto T para H.

[11]Nesta Proposição o autor está considerando um travessão e linhas ideais, sem peso. Pode-se pensar também que esta análise poderia ser aplicada em uma situação na qual os pesos do travessão e das linhas prendendo os corpos fossem desprezíveis em comparação com os pesos colocados na alavanca.

[12]Ou seja, a configuração com três pesos iguais colocados em B, C, E, é de equilíbrio:

[13]Ou seja, a configuração a seguir com três pesos iguais vai continuar mantendo a balança em equilíbrio:

movido para o ponto A, e também for colocado em A um outro peso igual a cada um dos dois pesos iguais que foram movidos de Z para A e de C para A, o travessão AB ficará equilibrado[14] e os três pesos iguais que estão no ponto A, sendo cada um deles igual ao peso B, manterão, juntamente com o peso B, o travessão AB paralelo ao horizonte. Mas a distância EC possui o mesmo número de múltiplos de AC[15] assim como todos os pesos no ponto A possuem em relação a um destes pesos,[16] e cada um destes pesos é igual ao peso B, e a distância EC é igual à distância CB. Assim, CB possui o mesmo número de múltiplos da distância AC assim como os pesos em A possuem em relação ao peso B. E a razão do peso A para o peso B é igual à razão da distância CB para a distância CA. E assim os dois pesos A e B mantêm o travessão AB paralelo ao horizonte, e era isto que queríamos demonstrar. O Livro de Euclides está completo. Encontrei o livro em uma outra cópia atribuída (ou pertencendo) a Banū Mūsā [o qual?] confrontei (*'āradtu*) com a cópia de Abū 'l-Husain al-Sūfī.

[14] Ou seja, inicialmente pode-se supor que adicionando no ponto C mais um peso igual aos anteriores, o equilíbrio não será alterado. Ficamos então com uma balança equilibrada na configuração contendo quatro pesos iguais:

Pelo que foi visto anteriormente, este equilíbrio não será alterado se movermos o peso que está em Z para o ponto A, desde que o peso igual que está em C também seja deslocado simultaneamente para A. Terminamos então na seguinte situação de equilíbrio:

[15] Neste caso $BC = EC = 3AC$.

[16] Isto é, no equilíbrio $P_A = 3P_B$.

Apêndice B

Tradução Comentada da Primeira Parte do Trabalho de Arquimedes Intitulado *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas* ou *Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas*

B.1 Comentários Gerais sobre esta Obra de Arquimedes

Em 1997 publicamos a tradução para o português da primeira parte do trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, de Arquimedes, [Ass97]. Esta tradução foi feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos de Arquimedes feita por T. L. Heath, [Arc02, págs. 189-202]. Mas o trabalho de Heath é uma paráfrase. Ou seja, ele conserva as idéias originais de Arquimedes mas as coloca em notação moderna e omite partes do texto que não considerou essenciais. Desde então tivemos acesso às obras completas de Arquimedes traduzidas do grego para o francês por Charles Mugler, [Mug70], [Mug71a], [Mug71b] e [Mug72]. Esta tradução de Mugler é literal e completa. Consideramos importante conhecer o trabalho de Arquimedes na maneira como ele próprio o apresentou, já que assim conseguimos seguir melhor seu raciocínio e podemos avaliar mais precisamente seus argumentos e demonstrações. Neste sentido apresentamos aqui uma nova tradução desta obra fundamental de Arquimedes, desta vez do francês para o português.

O título deste trabalho de Arquimedes é apresentado de diversas formas. Heath o apresenta como *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ou como *Os Centros de Gravidade dos Planos*, [Arc02, pág. 189]. Clagett o apresenta como *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ou como *Sobre os Centros de Gravidade*, [Cla79, pág. 31]. Dijksterhuis o apresenta como *Sobre o Equilíbrio dos Planos* ou como *Centros de Gravidade dos Planos*, [Dij87, pág. 286]. Mugler o apresenta como *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas* ou como *Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas*, [Mug71a, pág. 80]. Como estamos traduzindo aqui a partir de Mugler, seguiremos seu título.

Antes da tradução alguns comentários. O Postulado 7 de Arquimedes afirma que "o centro de gravidade de toda figura cujo perímetro gira sua concavidade para o mesmo lado tem de estar no interior da figura." Arquimedes está se referindo aqui a um perímetro que é côncavo na mesma direção. No Livro I de seu trabalho *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Arquimedes apresentou duas definições ou suposições axiomáticas explicando o que entendia por uma linha ser côncava na mesma direção. Na primeira definição ele postula a existência de um certo tipo de curva. "Existem em um plano certas linhas curvas finitas que estão totalmente sobre o mesmo lado da linha reta ligando suas extremidades, ou que não possuem partes delas sobre o outro lado desta linha reta," [Arc02, pág. 2]. Por linhas finitas ele quer dizer curvas que possuam duas extremidades. Arquimedes inclui na expressão "linhas curvas" não apenas linhas curvas com curvatura contínua, mas também linhas constituídas de um número qualquer de outras linhas que podem ser curvas ou retas. Devido a isto as curvas consideradas por ele também podem coincidir parcialmente com a linha reta determinada por suas extremidades. Definição 2: "Digo que uma linha é côncava na mesma direção quando ela tem a propriedade de que, se forem considerados quaisquer dois pontos sobre ela, ou todas as retas conectando os pontos incidem sobre o mesmo lado da linha, ou algumas destas retas incidem sobre um mesmo lado, enquanto outras incidem sobre a própria linha, mas nenhuma delas incide sobre o outro lado," [Arc02, pág. 2]. Para ilustrar este aspecto, Dijksterhuis apresenta a Figura B.1, [Dij87, pág. 144].

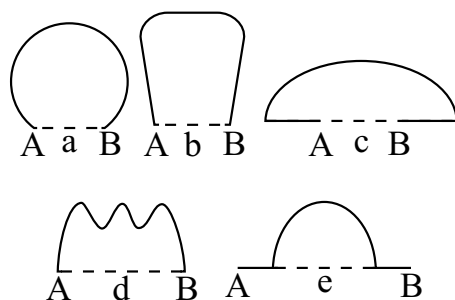



Figura B.1: Curvas gerais.

Destas figuras com extremidades em A e B, as curvas a, b, e c são do tipo descrito na Definição 2, ou seja, côncavas na mesma direção. Já as curvas d

e e não são deste tipo. Vamos analisar a curva b, considerando-a fechada pelo segmento AB, Figura B.2. Todas as retas ligando dois de seus pontos ou ficam sobre a periferia (como o segmento AB), ou então ficam do lado de dentro da curva (como FG ou HI). Por este motivo pode-se dizer que ela é côncava na mesma direção, assim como as curvas a e c da Figura B.1.

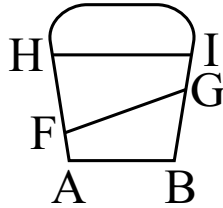



Figura B.2: Curva côncava na mesma direção.

Analisamos agora a curva d da Figura B.1, considerando-a fechada pelo segmento AB, Figura B.3. Algumas retas ligando dois de seus pontos vão ficar sobre a periferia, como o segmento AB. Também podemos ligar dois pontos desta curva tal que este segmento de reta fique totalmente no interior da curva, como o segmento FG. Por outro lado podemos encontrar dois outros pontos tal que o segmento de reta os ligando fique totalmente fora da curva fechada, como o segmento HI, Figura B.3. Por este motivo se diz que as curvas d e e da Figura B.1 não são côncavas na mesma direção.

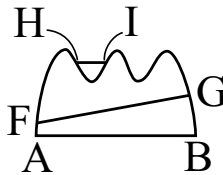



Figura B.3: Curva que não é côncava na mesma direção.

Neste sentido o que Arquimedes quer dizer na Definição 2 sobre "todas as retas conectando os pontos incidem sobre o mesmo lado da linha" parece ser que todas as retas ligando dois pontos quaisquer da curva vão estar sobre a periferia da curva ou dentro dela. Por outro lado quando afirma que nenhuma destas retas "incide sobre o outro lado," parece se referir a que nenhuma destas retas vai ficar do lado de fora da curva fechada.

Vamos apresentar aqui a demonstração da lei da alavanca dada por Arquimedes na Proposição 6, passo a passo, para esclarecermos todos os aspectos que ele utilizou. Ele chama de A, de B e de Z às grandezas, à localização de seus centros de gravidade e também, implicitamente, aos seus pesos. Vamos chamar de A, de B e de Z às grandezas e à localização de seus centros de gravidade. Mas vamos representar os pesos destas grandezas, respectivamente, por P_A, P_B e P_Z. Ele afirma que os pesos de A e de B são comensuráveis nesta proposição.

Logo, existe uma medida comuns dos pesos P_A e P_B. Ou seja, vai existir um peso P_Z tal que P_A é um múltiplo de P_Z e P_B é um outro múltiplo de P_Z. Podemos então escrever $P_A/P_B \equiv i/j$, onde i e j são dois números inteiros. Seguindo Dijksterhuis, [Dij87, págs. 289-290], vamos apresentar aqui um exemplo concreto com $i = 3$ e $j = 2$. Vamos nos referir aos segmentos de reta sempre ordenando as letras que representam as extremidades dos segmentos da esquerda para a direita, de acordo com a figura de Dijksterhuis. Arquimedes escolhe ainda um segmento de reta $E\triangle$ dividido no ponto Γ tal que $\Gamma\triangle/E\Gamma \equiv P_A/P_B$. Vamos chamar $E\Gamma \equiv x$ e $\Gamma\triangle \equiv y$. Como P_A e P_B são comensuráveis, segue-se das duas igualdades anteriores que

$$\frac{\Gamma\triangle}{E\Gamma} \equiv \frac{y}{x} \equiv \frac{P_A}{P_B} \equiv \frac{i}{j} \ . \tag{B.1}$$

Isto é, segue-se que $\Gamma\triangle$ e $E\Gamma$ também são comensuráveis. Com nossa escolha de i e de j chegamos então em $y/x = 3/2$, ver a Figura B.4.

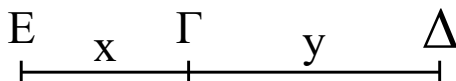



Figura B.4: Segmentos de reta comensuráveis.

Ele prolonga o segmento de reta $E\Gamma\triangle$ à direita pelo segmento $\triangle K = x$ e escolhe um ponto H entre Γ e $\triangle$ tal que $H\triangle = E\Gamma = \triangle K = x$. Como $E\Gamma = H\triangle = x$ e $\Gamma\triangle = y = \Gamma H + x$, vem que $\Gamma H = y - x$. Logo, $E\Gamma = x + \Gamma H = x + (y - x) = y$. Ele prolonga o segmento de reta $E\triangle$ à esquerda pelo segmento $\Lambda E \equiv y$. Ficamos então com o resultado mostrado na Figura B.5.

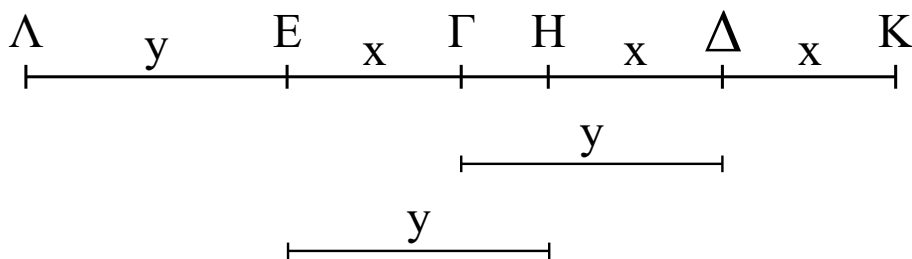



Figura B.5: Construção geométrica de Arquimedes.

Ele escolhe N como sendo um segmento de reta que é uma medida comum de $\Gamma\triangle$ e de $E\Gamma$. Vamos chamar $N \equiv w$. Escolhe ainda uma grandeza Z de peso P_Z que é uma medida comum de P_A e de P_B, tal que $P_A/P_Z \equiv \Lambda H/N = 2y/w$. Com isto e com a relação anterior vem: $P_B/P_Z = (P_B/P_A)(P_A/P_Z) = (j/i)(2y/w) = (x/y)(2y/w) = 2x/w$. Como P_Z é uma medida comum de P_A e de P_B, temos que P_A e P_B são múltiplos inteiros de P_Z. Como já escolhemos $P_A/P_B = 3/2$, vamos escolher um exemplo concreto no qual $P_A/P_Z = 6/1$ e $P_B/P_Z = 4/1$, Figura B.6.

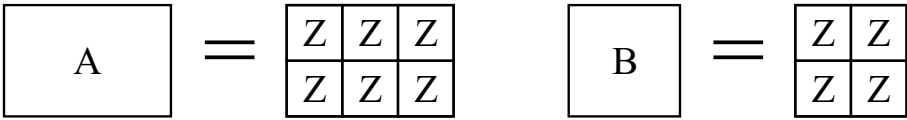



Figura B.6: Pesos de A e de B sendo múltiplos de um peso Z.

Pelas relações anteriores vem também: $y/w = 3/1$ e $x/w = 2/1$, ver a Figura B.7.

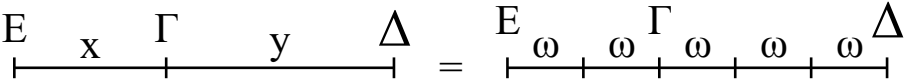



Figura B.7: Os segmentos x e y também são comensuráveis, tendo uma medida comum w.

Ele então divide todo o segmento $\Lambda K = 2y + 2x$ em partes iguais a $N = w$. No nosso exemplo particular teremos 10 pedaços de mesmo comprimento. Como $P_A/P_Z = 2y/w$, tem-se o mesmo número de pedaços iguais a w em $\Lambda H = 2y$, que o número de grandezas Z contidas na grandeza A. Da mesma forma, como $P_B/P_Z = 2x/w$, tem-se o mesmo número de pedaços iguais a w em $HK = 2x$, que o número de grandezas Z contidas na grandeza B. Ele então coloca o centro de gravidade de cada grandeza Z sobre o ponto médio de cada segmento w, como mostra a Figura B.8.

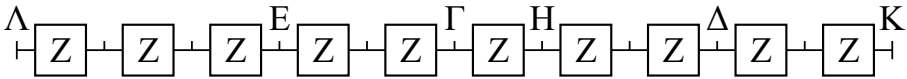



Figura B.8: Segmento ΛK dividido em 10 pedaços iguais.

Outra maneira de representar esta situação é suspendendo as grandezas por seus centros de gravidade, mas colocando-as abaixo do travessão da alavanca, ou seja, utilizando a maneira adotada por Arquimedes em seu trabalho *Quadratura da Parábola*. Vamos desprezar os pesos dos fios prendendo os corpos à alavanca. Esta situação é representada na Figura B.9.

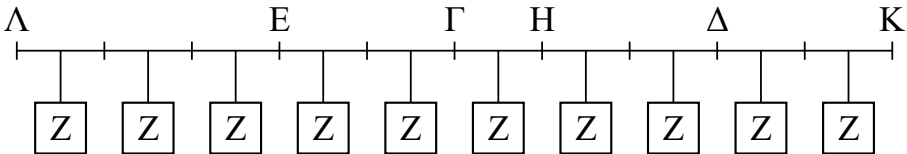



Figura B.9: Dez grandezas Z suspensas por seus centros de gravidade nos centros dos segmentos iguais de ΛK.

Arquimedes imagina agora o segmento de reta ΛK como sendo o travessão de uma alavanca na horizontal. Esta alavanca tem liberdade para girar ao redor de um eixo horizontal passando por Γ, o ponto médio do segmento. Este eixo é ortogonal ao travessão da alavanca. Pelo segundo Corolário da Proposição 5 vem que o CG deste conjunto par de grandezas de mesmo peso P_Z é o ponto Γ. Ou seja, se a alavanca for apoiada por este ponto e solta do repouso, ela permanecerá em equilíbrio, parada na horizontal. Também pelo Corolário 2 da Proposição 5 vem que o CG das grandezas de mesmo peso P_Z contidas no segmento ΛH é o ponto E, o ponto médio deste segmento. Mas a grandeza A possui o mesmo peso que a soma dos pesos das grandezas parciais Z contidas no segmento ΛH. Arquimedes substitui então o conjunto das grandezas contidas no segmento ΛH pela grandeza A atuando no CG deste conjunto (ou seja, no ponto E). Pelo Postulado 6 vem que o equilíbrio da alavanca com o fulcro localizado em Γ não é perturbado por esta substituição. Fica então com a situação de equilíbrio representada pela Figura B.10.

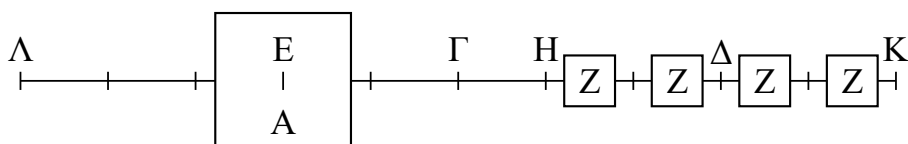



Figura B.10: A Figura B.9 era de equilíbrio. O Postulado 6 garante que esta nova situação também é de equilíbrio. Isto é, a alavanca não vai girar ao redor de Γ ao ser solta do repouso.

Outra maneira de representar esta nova situação de equilíbrio é colocando as grandezas suspensas abaixo do travessão, como na Figura B.11.

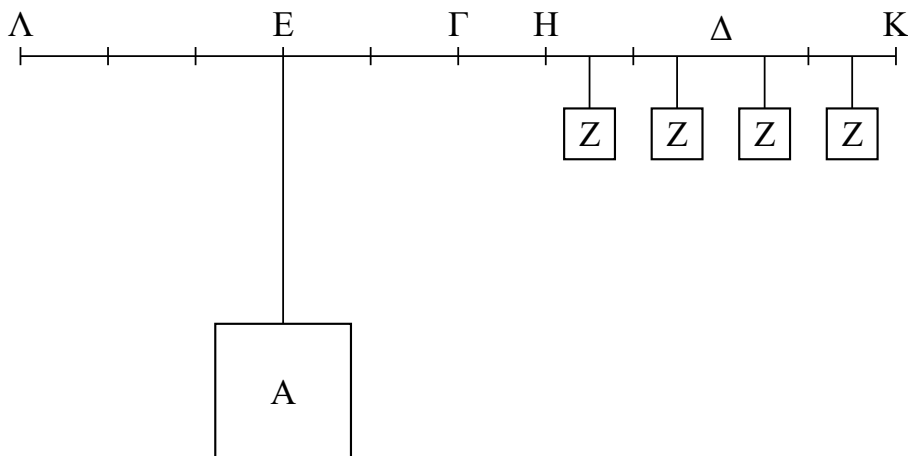



Figura B.11: Outra representação da situação de equilíbrio mostrada na Figura B.10.

Da mesma forma, o CG das grandezas de mesmo peso P_Z contidas no segmento HK é o ponto $\triangle$, o ponto médio deste segmento. Mas a grandeza B possui o mesmo peso que a soma dos pesos das grandezas parciais Z contidas no segmento HK. Arquimedes substitui o conjunto das grandezas contidas no segmento HK pela grandeza B atuando no CG deste conjunto (ou seja, no ponto $\triangle$). Vem novamente pelo Postulado 6 que o equilíbrio da alavanca com o fulcro localizado em Γ não é perturbado por esta substituição. Arquimedes termina então na situação de equilíbrio mostrada na Figura B.12.

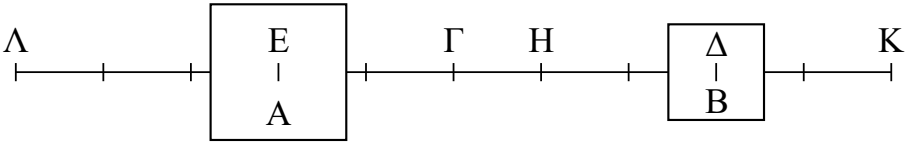



Figura B.12: Situação final de equilíbrio que é equivalente à lei da alavanca.

Podemos também representar esta situação colocando as grandezas A e B dependuradas por seus centros de gravidade por fios de peso desprezível tal que A e B fiquem em um nível abaixo ao travessão da alavanca, como na Figura B.13.

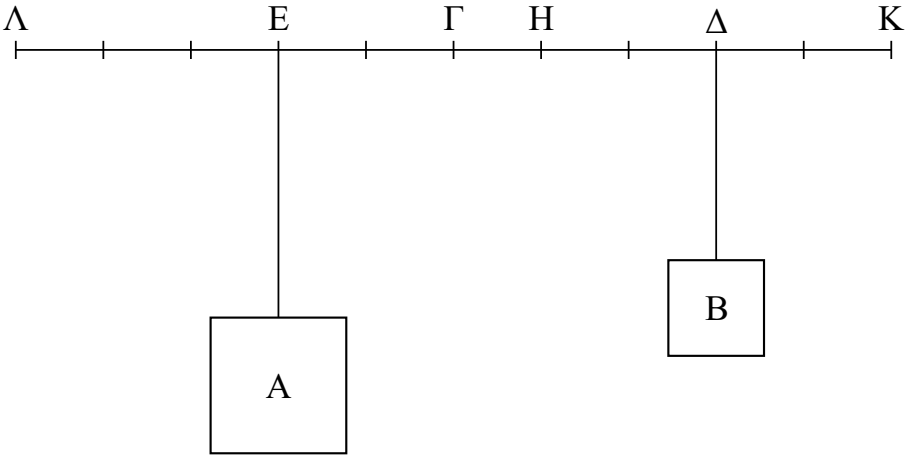



Figura B.13: Outra maneira de apresentar o resultado final de equilíbrio, equivalente à lei da alavanca.

A utilização do Postulado 6 garante que o CG desta última situação é o mesmo ponto da situação de onde partiu, ou seja, o CG é dado pelo ponto Γ. Isto é, uma alavanca apoiada no ponto Γ é mantida em equilíbrio se o CG de uma grandeza de peso P_A atuar no ponto E e o CG de uma grandeza de peso P_B atuar no ponto $\triangle$, desde que $P_A/P_B = \Gamma\triangle/E\Gamma$, que era o que Arquimedes queria demonstrar.

Após estes esclarecimentos apresentamos a tradução comentada da obra de Arquimedes.

B.2 Tradução da Obra de Arquimedes

Esta tradução é feita do francês para o português a partir da tradução francesa feita por Charles Mugler do original em grego de Arquimedes, [Mug71a, págs. 80-100]. Os termos entre colchetes, assim como as notas de rodapé, são nossos (algumas vezes adaptados de Mugler) para facilitar a compreensão de alguns termos. Tradução completa:

Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas

ou

Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas

[Livro] I

[Postulados]

[Postulado] 1. Postulamos que pesos iguais se equilibram a distâncias iguais e que pesos iguais suspensos a distâncias desiguais não se equilibram, mas que se inclinam do lado do peso suspenso à maior distância.[1]

[Postulado] 2. Quando pesos suspensos a certas distâncias estão em equilíbrio, se adicionarmos [algum corpo] a um dos dois pesos, os pesos não mais se equilibrarão, mas haverá uma inclinação do lado do peso ao qual foi adicionado [algum corpo].

[Postulado] 3. Da mesma forma, se removermos qualquer coisa de um dos dois pesos [que se equilibravam a certas distâncias], os pesos não mais se equilibrarão, mas haverá uma inclinação do lado do peso do qual nada foi retirado.

[1] Quando Arquimedes postula que pesos iguais se equilibram a distâncias iguais, ele se refere ao equilíbrio de dois corpos em lados opostos de uma alavanca que tem um eixo horizontal fixo em relação à Terra. A alavanca (ou o travessão da alavanca) também fica horizontal, ortogonal ao eixo de rotação, sendo que a alavanca é livre para girar em um plano vertical ao redor deste eixo. Este eixo é usualmente chamado de fulcro da alavanca. Ele idealiza as alavancas como sendo segmentos de reta sem peso, sempre na horizontal quando estão em equilíbrio (paradas em relação à Terra). Além disso, em todo este trabalho vai supor que os corpos são ligados à alavanca por seus centros de gravidade. As distâncias a que ele se refere aqui são as distâncias horizontais entre o ponto de suspensão dos corpos (isto é, seus centros de gravidade) e um plano vertical passando pelo fulcro da alavanca. Quando afirma que os corpos se inclinam do lado do peso suspenso à maior distância, ele quer dizer que se a alavanca for solta do repouso, o peso que está à maior distância do fulcro vai se aproximar da superfície da Terra, com o outro corpo afastando-se da Terra.

[Postulado] 4. Nas figuras planas iguais e semelhantes,[2] sobrepostas uma sobre a outra, os centros de gravidade também se sobrepõem um sobre o outro.

[Postulado] 5. Nas figuras planas desiguais, mas semelhantes, os centros de gravidade serão situados semelhantemente.[3] Dizemos que pontos estão situados semelhantemente nas figuras semelhantes quando as linhas retas ligando estes pontos aos vértices dos ângulos iguais formam ângulos iguais com os lados homólogos.[4]

[Postulado] 6. Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.[5]

[Postulado] 7. O centro de gravidade de toda figura cujo perímetro gira sua concavidade para o mesmo lado tem de estar no interior da figura.[6]

Admitindo estes princípios [demonstraremos as proposições:]

[Proposição] 1. Os pesos que se equilibram a distâncias iguais são iguais entre si.

Se, com efeito, os pesos forem desiguais, quando o excesso [de peso] do maior

[2]Diz-se que duas figuras são semelhantes quando possuem a mesma forma e os mesmos ângulos entre os pontos correspondentes, embora não necessariamente as duas figuras precisem ter o mesmo tamanho. Ou seja, se aumentarmos ou diminuirmos todas as dimensões lineares de uma figura de um mesmo valor (dobrando ou triplicando, por exemplo), chegaremos um uma figura semelhante à original. Aristóteles (384-322 a.C.) já definia que duas figuras são semelhantes quando seus lados são proporcionais e seus ângulos iguais. O Livro VI de *Os Elementos* de Euclides começa com a seguinte definição: "As figuras retilíneas semelhantes possuem seus vários ângulos iguais e seus lados ao redor dos ângulos iguais proporcionais," [Euc56, Vol. 2, pág. 188]. Por exemplo, um retângulo de lados $3a$ e $3b$ é semelhante a um outro retângulo de lados a e b já que os lados são proporcionais e os ângulos das diagonais com os lados maiores são iguais. Já um retângulo de lados $3a$ e $2b$ não é semelhante a um retângulo de lados a e b. O motivo é que neste último caso os ângulos das diagonais com os lados maiores não são iguais entre si nestes dois retângulos.

No caso deste Postulado 4, Arquimedes está considerando figuras não apenas semelhantes mas congruentes, isto é, de mesmo tamanho.

[3]Este postulado vai ser usado nas Proposições 11 e 13 para se chegar no CG de um triângulo.

[4]Lados homólogos são os lados correspondentes. Por exemplo, suponha que temos dois triângulos retângulos semelhantes, o triângulo A de lados 3 m, 4 m e 5 m, enquanto o triângulo B tem lados de 6 m, 8 m e 10 m. O lado de 6 m do triângulo B é o homólogo ao lado de 3 m do triângulo A.

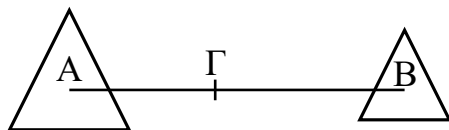
[5]Este é o postulado fundamental que permitirá a Arquimedes chegar não apenas à lei da alavanca, mas também ao cálculo correto do centro de gravidade de diversas figuras lineares, planas e volumétricas. O significado deste postulado crucial foi esclarecido por Vailati, Toeplitz, Stein, [Ste30], e Dijksterhuis, [Dij87, págs. 17, 47-8, 289-304, 315-6, 321-2 e 435-6]. O ponto principal, que concorda com a maneira implícita com que Arquimedes utiliza este postulado em suas deduções, é que por "grandezas a certas distâncias," Arquimedes quer dizer "grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro." E por "grandezas equivalentes," Arquimedes quer dizer "grandezas de mesmo peso." Ou seja, este postulado permite a Arquimedes substituir um corpo A dependurado em uma alavanca através de seu centro de gravidade localizado à distância horizontal d do plano vertical passando pelo fulcro da alavanca em equilíbrio, por outro corpo B conveniente que tenha o mesmo peso que A, desde que o CG deste corpo B também seja dependurado na alavanca à mesma distância d do plano vertical passando pelo fulcro. O postulado afirma que se a alavanca estava em equilíbrio com o corpo A, vai continuar em equilíbrio com sua substituição pelo corpo B.

[6]Ver a Seção B.1 para uma explicação deste postulado.

tiver sido retirado, os pesos restantes não mais se equilibrarão, pois foi retirado alguma coisa de um dos dois pesos [que estavam] em equilíbrio.[7] Segue-se que os pesos que se equilibram a distâncias iguais são iguais.[8]

[Proposição] 2. Os pesos desiguais suspensos a distâncias iguais não se equilibram, mas há uma inclinação do lado maior.

Se, com efeito, for retirado o excesso [de peso], os pesos se equilibrarão, já que pesos iguais se equilibram em distâncias iguais.[9] Conseqüentemente, ao adicionar o que havia sido retirado, haverá uma inclinação do lado maior, pois terá sido adicionado [alguma coisa] a um dos dois pesos que se equilibravam.[10]

[Proposição] 3. Pesos desiguais se equilibrarão em distâncias desiguais, com o peso maior encontrando-se na distância menor.

Sejam A e B os pesos desiguais, sendo A mais pesado do que B. [Vamos supor] que se equilibrem nas distâncias $A\Gamma$ e ΓB. É necessário demonstrar que $A\Gamma$ é inferior a ΓB.

[Suponha] que $A\Gamma$ não seja inferior a ΓB. Retiremos o excesso [de peso] de A sobre B. Como foi retirado alguma coisa de um dos dois pesos que se equilibravam, haverá inclinação do lado de B.[11] Mas esta inclinação não ocorrerá. Pois se ΓA é igual a ΓB, os pesos se equilibrarão.[12] E se ΓA é superior a ΓB, haverá inclinação do lado de A, pois pesos iguais a distâncias desiguais não se equilibram, mas ocorre inclinação do lado do peso suspenso na distância maior.[13] Por este motivo, $A\Gamma$ é inferior a ΓB.

Também é evidente que os pesos que se equilibram em distâncias desiguais são desiguais, e que o peso suspenso na distância menor é o maior.

[Proposição] 4. Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade,[14] o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas.[15]

---

[7] De acordo com o Postulado 3.

[8] No primeiro Postulado Arquimedes afirma que pesos iguais se equilibram a distâncias iguais do fulcro. O que ele demonstra nesta primeira Proposição é que pesos diferentes não podem se equilibrar a distâncias iguais do fulcro. Ou seja, se dois corpos se equilibram a distâncias iguais do fulcro, a única possibilidade é que eles tenham o mesmo peso.

[9] Pelo Postulado 1.

[10] Pelo Postulado 2.

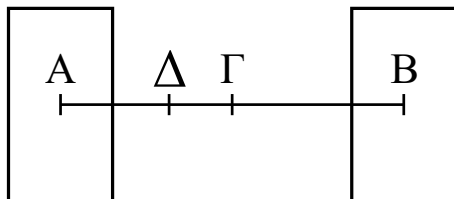
[11] Pelo Postulado 3.

[12] Pelo Postulado 1, pois teremos pesos iguais em distâncias iguais.

[13] Pelo Postulado 1.

[14] Isto é, se os dois centros de gravidade estão separados espacialmente.

[15] Um exemplo de duas grandezas que possuem o mesmo centro de gravidade, ou cujos centros de gravidade coincidem espacialmente, é o caso de um círculo e de um quadrado concêntricos. Por outro lado, caso o círculo e o quadrado estejam lado a lado, eles não possuirão

Seja A o centro de gravidade da grandeza A, e B o centro de gravidade da grandeza B. Seja Γ o ponto médio do segmento de reta AB. Afirmo que Γ é o centro [de gravidade] da grandeza composta a partir das duas grandezas [anteriores].

Com efeito, se Γ não é [o centro de gravidade], seja $\triangle$ o centro de gravidade da grandeza composta pelas grandezas A e B, se isto for possível; com efeito, já mostramos anteriormente[16] que este centro [de gravidade da grandeza composta] está situado sobre a reta AB. A partir do momento em que $\triangle$ é o centro de gravidade da grandeza composta de A e de B, [esta grandeza composta] estará em equilíbrio se o ponto $\triangle$ está fixo.[17] Conseqüentemente, as grandezas A e B se equilibrarão nas distâncias $A\triangle$ e $\triangle B$, o que é impossível,[18] pois as grandezas iguais não se equilibram em distâncias desiguais. Portanto, é evidente que o ponto Γ é o centro de gravidade da grandeza composta pelas grandezas A e B.[19]

[Proposição] 5. Se os centros de gravidade de três grandezas estão situados sobre a mesma reta, se estas grandezas possuem o mesmo peso, e se os segmentos de reta entre os centros [de gravidade] são iguais, então o centro de gravidade da grandeza composta pela soma das três grandezas será o ponto que também é o centro de gravidade da grandeza situada no meio.

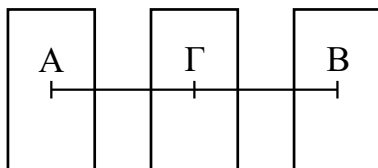
---

o mesmo centro de gravidade, estando estes centros de gravidade separados espacialmente.

[16]Provavelmente em seu trabalho *Sobre as Balanças*, ou *Sobre as Alavancas*, atualmente perdido.

[17]Fixo em relação à Terra. Isto é, o ponto $\triangle$ precisa estar apoiado ou suspenso por algum suporte.

[18]Pelo Postulado 1, pois pesos iguais em distâncias desiguais não se equilibram.

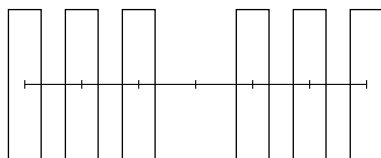
[19]Este primeiro cálculo do CG de uma grandeza composta de outras duas grandezas afastadas espacialmente é muito interessante. Em primeiro lugar observa-se da figura de Arquimedes que o CG da figura composta vai estar no espaço vazio entre os corpos A e B. Este é um exemplo simples de que nem sempre o CG precisa estar ligado à matéria. De qualquer forma, em seu raciocínio Arquimedes supõe implicitamente o segmento de reta AB como sendo o travessão rígido de uma alavanca que está na horizontal. Procura então em qual ponto ao longo do segmento de reta AB o fulcro da alavanca deve ser colocado para que a figura fique em equilíbrio ao ser solta do repouso na horizontal. Conclui que isto só é possível se o eixo da alavanca estiver a meia distância entre os centros de gravidade dos corpos A e B de mesmo peso.

Sejam as três grandezas A, B, Γ, tendo como seus centros de gravidade os pontos A, B, Γ, alinhados [ao longo da mesma linha reta]. Sejam [os pesos das] as grandezas A, B, Γ, iguais entre si, e seja $A\Gamma$ igual a ΓB. Afirmo que o centro de gravidade da grandeza composta pela soma das [três] grandezas é o ponto Γ.

Como as grandezas A e B possuem o mesmo peso, o centro de gravidade [de A e de B consideradas conjuntamente] será o ponto Γ, pois são iguais os segmentos de reta $A\Gamma$ e ΓB.[20] Mas o ponto Γ também é o centro de gravidade da grandeza Γ. Portanto, é evidente que o centro de gravidade da grandeza composta pela soma das três grandezas é o mesmo ponto que também é o centro de gravidade da grandeza do meio.

Corolário I

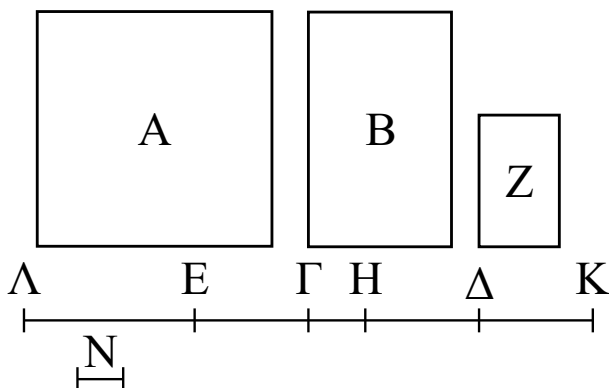
É claro a partir do que já foi apresentado que para toda quantidade ímpar de grandezas cujos centros de gravidade estejam alinhados [ao longo da mesma linha reta] e das quais aquelas que estão à mesma distância da grandeza do meio possuem o mesmo peso e que, além disso, estejam dispostas de maneira que os segmentos de reta entre os centros de gravidade das grandezas sejam iguais[21] — [então] o centro de gravidade da grandeza composta pela soma das grandezas será o ponto que também é o centro de gravidade da grandeza do meio.

Corolário II

Mesmo quando as grandezas são em número par, caso seus centros de gravidade estejam alinhados [ao longo de uma mesma linha reta], se as [duas] grandezas do meio e aquelas que são eqüidistantes destas grandezas do meio possuem os mesmos pesos, e se os segmentos de reta entre os centros [de gravidade] são iguais — [então] o centro de gravidade da grandeza composta pela soma das grandezas será o ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das grandezas, como mostra a figura.

[20] Pela Proposição 4.

[21] Dos dois lados do centro de gravidade da grandeza do meio.

[Proposição] 6. [Duas] grandezas comensuráveis[22] se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.[23]

Sejam A e B as grandezas comensuráveis, cujos centros [de gravidade] são A e B. Além disso, seja $E\triangle$ um [certo] comprimento, e esteja o comprimento $\triangle\Gamma$ para o comprimento ΓE assim como [o peso de] A está para [o peso de] B. É necessário demonstrar que o centro de gravidade da grandeza composta pelas grandezas A e B é o ponto Γ.

Com efeito, a partir do momento em que $\triangle\Gamma$ está para ΓE assim como A está para B, e que A e B são comensuráveis, segue-se que os dois segmentos de reta $\Gamma\triangle$ e ΓE são, por sua vez, comensuráveis. Seja N a medida comum

[22]A idéia de comensurar é a de medir por comparação. Isto é, medir duas ou mais grandezas com a mesma unidade ou padrão de medida. No caso do peso vamos supor que a unidade ou padrão de medida seja um corpo C. Caso o peso de um corpo A seja 5 vezes o peso de C e o peso de um corpo B seja 3 vezes o peso de C, então dizemos que os pesos de A e de B são comensuráveis. Isto é, existe uma unidade de medida tal que o peso de A é um múltiplo desta unidade e o peso de B é um outro múltiplo desta mesma unidade. Em outras palavras, o peso do corpo C mede não apenas o peso de A mas também o peso de B.

Caso não seja possível encontrar uma unidade de medida comum para medir duas grandezas, então diz-se que elas são incomensuráveis. No caso do peso isto vai ocorrer se não for possível encontrar uma medida comum tal que o peso de cada um destes corpos seja um múltiplo inteiro desta medida comum.

O exemplo mais comum de incomensurabilidade é o de segmentos. A diagonal de um quadrado, por exemplo, não é comensurável com o lado deste quadrado. Isto é, não é possível encontrar um terceiro segmento tal que a diagonal do quadrado seja um múltiplo deste terceiro segmento e o lado do quadrado seja um outro múltiplo deste terceiro segmento.

A Definição 1 do livro X de *Os Elementos* de Euclides afirma o seguinte: "Diz-se que são comensuráveis as grandezas que são medidas pela mesma unidade de medida, e são chamadas de incomensuráveis as grandezas que não podem ter qualquer unidade comum de medida," [Euc56, Vol. 3, pág. 10]. Se A e B são comensuráveis com C então $A = mC$ e $B = nC$, onde m e n são inteiros.

Já a Proposição 5 do livro X de *Os Elementos* de Euclides afirma o seguinte: "Grandezas comensuráveis têm uma para a outra a razão que um número tem para um número." Os números a que Euclides se refere aqui são inteiros. Isto é, a razão entre duas grandezas comensuráveis é igual à razão entre dois números inteiros. No caso do exemplo do parágrafo anterior podemos dizer então que A está para B assim como m está para n.

[23]Ver a Seção B.1 para uma apresentação detalhada da prova desta proposição.

[destes dois segmentos de reta]. Sejam dados os dois segmentos de reta $\triangle H$ e $\triangle K$ iguais, cada um, a $E\Gamma$, e seja dado o segmento de reta $E\Lambda$ igual a $\triangle\Gamma$. Como $\triangle H$ é igual a ΓE, [segue-se que] $\triangle\Gamma$ é igual a EH, de maneira que ΛE também é igual a EH. Conseqüentemente, ΛH é o dobro de $\triangle\Gamma$, e HK é o dobro de ΓE. Conseqüentemente, N também mede cada um dos segmentos de reta ΛH e HK, pois N mede suas metades.[24] E como, por um lado, $\triangle\Gamma$ está para ΓE assim como A está para B, e como, por outro lado, ΛH está para HK assim como $\triangle\Gamma$ está para ΓE, — cada um dos primeiros segmentos,[25] é, de fato, o dobro de cada um dos segundos [segmentos][26] —, [segue-se que] a razão de ΛH para HK também é igual à razão de A para B. [Suponha] que A contém o mesmo número de vezes a grandeza Z que ΛH contém [o segmento de reta] N.[27] Segue-se que ΛH está para N assim como [o peso de] A está para [o peso de] Z. Mas KH também está para ΛH assim como B está para A. Logo, por identidade, KH está para N assim como B está para Z. Conseqüentemente, B é um múltiplo de Z pelo mesmo número de vezes que KH é um múltiplo de N. Mas já mostramos que A também é um múltiplo de Z, de forma que Z é uma medida comum de A e de B. Se agora o segmento ΛH for dividido em partes iguais a N, e a grandeza A [for dividida] em partes iguais a Z, os segmentos iguais a N, contidos no segmento ΛH, serão em mesmo número que as grandezas parciais, iguais a Z, contidas na grandeza A. Conseqüentemente, se colocamos sobre cada um dos segmentos de ΛH uma grandeza igual a Z tendo seu centro de gravidade no ponto médio do segmento, a soma [dos pesos] destas grandezas é igual à grandeza A, e o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todas estas grandezas parciais será o ponto E. Pois, de fato, todas estas grandezas são em número par, e existe o mesmo número destas grandezas de um lado e do outro lado de E, já que o segmento ΛE é igual ao segmento HE. Da mesma maneira, será demonstrado que se sobre cada um dos segmentos parciais do segmento KH colocarmos uma grandeza igual a Z, tendo seu centro de gravidade no meio do segmento, a soma [dos pesos] destas grandezas parciais será igual a B, e que o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todas estas grandezas parciais será o ponto $\triangle$.[28] Portanto, a grandeza A será colocada no ponto E,[29] e [a grandeza] B [será colocada]

[24]Ver a Proposição 12 do livro X de *Os Elementos* de Euclides: "Grandezas comensuráveis com uma mesma grandeza também são comensuráveis entre si," [Euc56, Vol. 3, pág. 34]. Ou seja, se A é comensurável com C e se B é comensurável com C, então A é comensurável com B. A idéia da demonstração desta proposição é a seguinte: Se A é comensurável com C então vai existir uma grandeza D tal que $A = mD$ e $C = nD$, onde m e n são inteiros. Logo A está para C assim como m está para n. Como B é comensurável com C então vai existir uma outra grandeza E tal que $B = m'E$ e $C = n'E$, onde m' e n' são inteiros. Logo B está para C assim como m' está para n'. Então vai existir uma grandeza F tal que $A = mn'F$ e $B = nm'F$. Ou seja, A está para B assim como mn' está para nm'. Isto é, A é comensurável com B já que existirá uma grandeza F tal que A é um múltiplo de F e B é um outro múltiplo de F.

[25]Isto é, ΛH e HK.

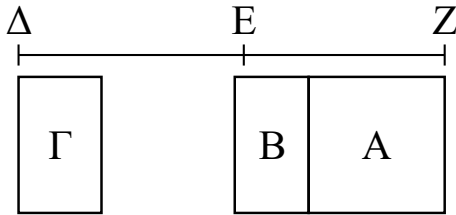
[26]Isto é, $\triangle\Gamma$ e ΓE.

[27]Isto é, supor uma grandeza de peso Z tal que $A/Z = \Lambda H/N$.

[28]A partir do momento em que Z é uma medida da grandeza B. Conferir o Corolário 2 da Proposição 5.

[29]Isto é, Arquimedes coloca o CG da grandeza A atuando no ponto E da alavanca, assim

no ponto $\triangle$.[30] Portanto, teremos grandezas [de pesos] iguais entre elas, cujos centros de gravidade estão igualmente distantes entre si e que são colocadas em número par sobre um segmento de reta. Portanto, é evidente que o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todas estas grandezas é o ponto médio do segmento de reta que contém os centros de gravidade das grandezas do meio.[31] Mas como o segmento de reta ΛE é igual ao segmento $\Gamma\triangle$, e o segmento $E\Gamma$ é igual ao segmento $\triangle K$, [segue-se que] todo o segmento $\Lambda\Gamma$ é igual ao segmento ΓK. Segue-se que o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todas as grandezas parciais é o ponto Γ.[32] Conseqüentemente, a grandeza A, colocada no ponto E,[33] e a grandeza B, colocada no ponto $\triangle$,[34] se equilibrarão no ponto Γ.[35]

[Proposição] 7. Da mesma maneira, se [duas] grandezas são incomensuráveis, elas se equilibrarão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas.

Sejam as grandezas incomensuráveis AB e Γ, e sejam as distâncias $\triangle E$ e EZ. Seja a razão AB para Γ igual à razão da distância $E\triangle$ para a distância EZ. Afirmo que o centro de gravidade da grandeza composta por estas duas grandezas[36] AB e Γ é o ponto E.

Pois se [a grandeza] AB, colocada no ponto Z, não equilibra [a grandeza] Γ, colocada no ponto $\triangle$, então ou a grandeza AB será muito grande em relação à grandeza Γ para que haja equilíbrio, ou ela não será grande o suficiente. [Vamos supor] que ela seja muito grande,[37] e que seja retirado de AB uma grandeza inferior a este excesso de AB sobre Γ que impede o equilíbrio,[38] e tal que a

---

como vai colocar o CG da grandeza B atuando no ponto $\triangle$ da alavanca.

[30]Isto é permitido pelo Postulado 6. É aqui que Arquimedes utiliza este postulado crucial. Este postulado garante que se a alavanca estava em equilíbrio antes das partes iguais de A, igualmente espaçadas ao redor de E, serem juntadas em E, ela continuará em equilíbrio após essa união. E vice-versa. O mesmo ocorrendo com as partes iguais de B, igualmente espaçadas ao redor de $\triangle$. Ou seja, o equilíbrio da alavanca não é perturbado ao juntarmos as partes iguais de B, ou ao espalhá-las uniformemente ao redor de $\triangle$.

[31]A partir do Corolário 2 da Proposição 5.

[32]Que é o ponto médio do segmento ΛK.

[33]Isto é, o CG da grandeza A atuando no ponto E.

[34]Isto é, o CG da grandeza B atuando no ponto $\triangle$.

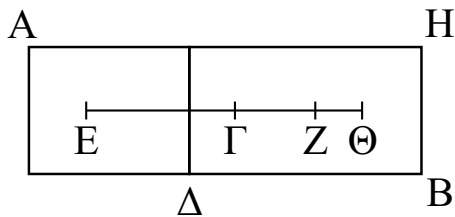
[35]Pelo Postulado 6.

[36]Supondo que o centro de gravidade de AB seja colocado em Z e que o centro de gravidade de Γ seja colocado sobre $\triangle$.

[37]Neste caso se a alavanca for solta do repouso ela não permanecerá em equilíbrio, mas a grandeza AB se aproximará da Terra e a grandeza Γ se afastará da Terra.

[38]Ou seja, está retirando de AB a grandeza B. Mas faz isto supondo que a grandeza restante

grandeza restante A seja comensurável com Γ. Portanto, a partir do momento em que as grandezas A e Γ são comensuráveis, e que a razão de A para Γ é inferior à razão do segmento de reta $\triangle E$ para o segmento EZ, as grandezas A e Γ não se equilibrarão[39] nas distâncias $\triangle E$ e EZ se a grandeza A for colocada no ponto Z e a grandeza Γ for colocada no ponto $\triangle$.[40] Pelos mesmos motivos, também não ocorrerá equilíbrio se a grandeza Γ for muito grande para equilibrar a grandeza AB.

[Proposição] 8. Se for retirada de uma certa grandeza uma [outra] grandeza que não possua o mesmo centro [de gravidade] que o todo, o centro de gravidade da grandeza restante será a extremidade do segmento de reta cortado do prolongamento da reta ligando os centros de gravidade da grandeza inteira e da grandeza removida, do lado do centro de gravidade da grandeza inteira, e cortado de tal maneira que a razão deste segmento para o segmento de reta entre os centros [de gravidade] seja igual à razão do peso da grandeza removida para o peso da grandeza restante.[41]

Seja Γ o centro de gravidade de uma grandeza AB. Vamos retirar da grandeza AB a grandeza $A\triangle$, e seja E o centro de gravidade de $A\triangle$. Vamos retirar do prolongamento da reta $E\Gamma$ [em direção a Γ] o segmento ΓZ de tal maneira que a razão de ΓZ para ΓE seja igual à razão [do peso] da grandeza $A\triangle$ para a grandeza $\triangle H$. É necessário demonstrar que o centro de gravidade da grandeza $\triangle H$ é o ponto Z.

Com efeito, [vamos supor] que o centro [de gravidade] não seja Z, mas o ponto Θ. Portanto, a partir do momento em que a grandeza $A\triangle$ tenha como centro de gravidade o ponto E, e a grandeza $\triangle H$ [tenha como centro de gravidade] o ponto Θ, o centro de gravidade da grandeza composta pelas grandezas $A\triangle$ e $\triangle H$ estará sobre o segmento de reta $E\Theta$, determinado de maneira que [os comprimentos de] seus segmentos parciais tenham entre eles a razão inversa [dos

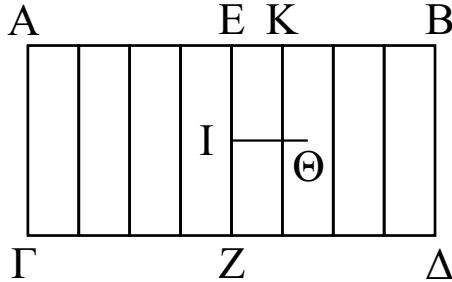
A colocada com seu centro de gravidade sobre Z ainda não equilibre a grandeza Γ colocada com seu centro de gravidade sobre $\triangle$. Isto é, supõe que ainda neste caso se a alavanca for solta do repouso, a grandeza A se aproximará da Terra e a grandeza Γ se afastará da Terra.

[39] Pela Proposição 6.

[40] A partir do momento em que $A/\Gamma < \triangle E/EZ$ o lado $\triangle$ vai se inclinar em direção à Terra, o que é impossível, pois a grandeza B retirada de AB é, por hipótese, muito pequena para que a grandeza restante, A, possa equilibrar a grandeza Γ.

[41] Embora a Figura relativa a esta Proposição seja a de um retângulo, a demonstração é genérica e vale para uma Figura e para uma parte desta Figura tendo formatos arbitrários. Em particular na Proposição 15 ela será utilizada para um triângulo e para um trapézio.

pesos] das grandezas.[42] Conseqüentemente,[43] o ponto Γ não estará situado no lugar designado pela divisão correspondente à divisão que acabamos de indicar. Portanto, o ponto Γ não é o centro [de gravidade] da grandeza composta pelas grandezas $A\triangle$ e $\triangle H$, isto é, da grandeza AB. Mas, por hipótese, ele é [o centro de gravidade da grandeza AB]. Segue-se que Θ não é o centro de gravidade da grandeza $\triangle H$.

[Proposição] 9. Em todo paralelogramo o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando os pontos médios dos lados opostos do paralelogramo.

Seja $AB\Gamma\triangle$ o paralelogramo, e EZ a reta ligando os pontos médios dos lados AB e $\Gamma\triangle$. Afirmo que o centro de gravidade do paralelogramo $AB\Gamma\triangle$ estará situado sobre a reta EZ.

[Vamos supor] que não seja assim, mas que o centro de gravidade seja, se possível, o ponto Θ. Seja a reta ΘI paralela à [reta] AB. Sendo o segmento de reta EB dividido continuamente em duas partes iguais,[44] chegará um momento no qual o segmento restante[45] será inferior a $I\Theta$. Vamos dividir cada um dos segmentos de reta AE e EB em segmentos parciais iguais ao segmento EK [que é inferior a $I\Theta$]. Tracemos pelos pontos de divisão [os segmentos de reta] paralelos a EZ. Todo o paralelogramo ficará assim dividido em paralelogramos iguais e semelhantes ao paralelogramo KZ. Ao aplicarmos estes paralelogramos iguais e semelhantes a KZ uns sobre os outros,[46] seus centros de gravidade coincidirão entre si.[47] Teremos então: certas grandezas, [ou seja,] os paralelogramos iguais a KZ, em número par; seus centros de gravidade situados sobre uma reta; as grandezas do meio iguais [entre si]. Além disso, todas as grandezas, de um

[42] Pelas Proposições 6 e 7.

[43] Mugler afirma que faltam aqui alguns elos no raciocínio, a saber, [Mug71a, págs. 89 e 200]: "mas, por hipótese, o ponto Γ já marca no segmento EZ uma divisão tal que os [comprimentos dos] segmentos parciais possuem entre eles a razão inversa [dos pesos] das grandezas; portanto, ele não poderá marcar a mesma divisão no segmento $E\Theta$."

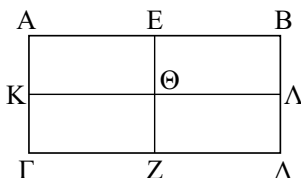
[44] Ou seja, divide-se o segmento de reta EB em duas partes iguais. Depois cada metade é dividida em duas partes iguais. E assim sucessivamente.

[45] Ou seja, o segmento de reta EK na figura.

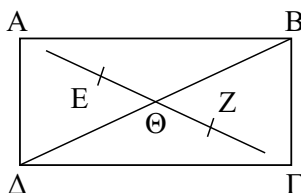
[46] A idéia de aplicação de áreas iguais pode ser pensada neste caso como uma sobreposição física. Isto é, ao sobrepor qualquer um destes paralelogramos sobre qualquer outro destes paralelogramos, seus centros de gravidade vão coincidir, estando um centro de gravidade sobreposto sobre o outro.

[47] Pelo Postulado 4.

lado e do outro das grandezas do meio, são iguais, e os segmentos de reta entre os centros [de gravidade] são iguais. Segue-se que o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todos estes paralelogramos estará situado sobre a reta ligando os centros de gravidade das áreas do meio.[48] Mas este não é o caso, pois o ponto Θ está situado fora do paralelogramo do meio.[49] Portanto, é evidente que o centro de gravidade do paralelogramo $AB\Gamma\triangle$ está situado sobre a reta EZ.

[Proposição] 10. Em todo paralelogramo o centro de gravidade é o ponto de encontro das diagonais.

Seja $AB\Gamma\triangle$ o paralelogramo, e neste paralelogramo a reta EZ dividindo os lados AB e $\Gamma\triangle$ em duas partes iguais, e a reta $K\Lambda$ dividindo os lados $A\Gamma$ e $B\triangle$ [em duas partes iguais]. Portanto, o centro de gravidade do paralelogramo $AB\Gamma\triangle$ está situado sobre a reta EZ, pois isto foi demonstrado.[50] Mas pelos mesmos motivos ele também está situado sobre a reta $K\Lambda$. Segue-se que o ponto Θ é o centro de gravidade. Contudo, é no ponto Θ que se encontram as diagonais do paralelogramo, de modo que a proposição está demonstrada.

Outra demonstração.

Mas ainda é possível demonstrar a mesma proposição de uma outra maneira.

Seja $AB\Gamma\triangle$ um paralelogramo, e $\triangle B$ uma de suas diagonais. Portanto, os triângulos $AB\triangle$ e $B\triangle\Gamma$ são iguais e semelhantes entre si. Se estes triângulos forem aplicados um sobre o outro,[51] seus centros de gravidade coincidirão entre si.[52] Seja E o centro de gravidade do triângulo $AB\triangle$. Vamos dividir $\triangle B$ em

[48]Pelo Corolário 2 da Proposição 5.

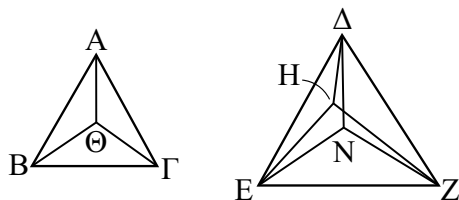
[49]Pois, por hipótese, EK é inferior a $I\Theta$. Arquimedes chega então em uma contradição.

[50]Pela Proposição 9.

[51]Isto é, se os triângulos forem sobrepostos. Neste caso com o lado AB se sobrepondo ao lado $\Gamma\triangle$ e com o lado $A\triangle$ se sobrepondo ao lado ΓB.

[52]Pelo Postulado 4.

duas partes iguais pelo ponto Θ. Ligamos $E\Theta$ e pegamos sobre o prolongamento de $E\Theta$ o segmento $Z\Theta$ igual a ΘE. Se agora o triângulo $AB\triangle$ é aplicado sobre o triângulo $B\triangle\Gamma$, o lado AB estando colocado sobre [o lado] $\triangle\Gamma$, o lado $A\triangle$ [estando colocado] sobre $B\Gamma$, o segmento ΘE, por sua vez, estará aplicado sobre $Z\Theta$, e o ponto E coincidirá com o ponto Z. Mas assim ele coincidirá também com o centro de gravidade do triângulo $B\triangle\Gamma$.[53] Portanto, a partir do momento em que E é o centro de gravidade do triângulo $AB\triangle$, e Z é o centro de gravidade do triângulo $\triangle B\Gamma$, é evidente que o centro de gravidade da grandeza composta por estes dois triângulos é o ponto médio do segmento de reta EZ,[54] a saber, o ponto Θ.

[Proposição] 11. São dados dois triângulos semelhantes e dentro destes triângulos são dados os pontos situados semelhantemente em relação aos triângulos. Se um destes pontos é o centro de gravidade do triângulo dentro do qual está situado, o outro ponto também será o centro de gravidade do triângulo dentro do qual está situado.[55] Chamamos de pontos situados semelhantemente em relação às figuras semelhantes, aos pontos tais que as retas que os ligam aos vértices dos ângulos iguais fazem ângulos iguais com os lados homólogos.[56]

Sejam $AB\Gamma$ e $\triangle EZ$ os dois triângulos, e esteja $A\Gamma$ para $\triangle Z$ assim como AB está para $\triangle E$ e assim como $B\Gamma$ está para EZ.[57] Sejam Θ e N dois pontos situados semelhantemente em relação aos triângulos $AB\Gamma$ e $\triangle EZ$ indicados, e seja Θ o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$. Afirmo que o ponto N é o centro de gravidade do triângulo $\triangle EZ$.

[Vamos supor] que não seja assim, e que o centro de gravidade do triângulo $\triangle EZ$ seja o ponto H. Ligamos as retas ΘA, ΘB, $\Theta\Gamma$, $\triangle N$, EN, ZN, $\triangle H$, EH, ZH. Portanto, a partir do momento em que o triângulo $AB\Gamma$ é semelhante ao triângulo $\triangle EZ$, e que os centros de gravidade são os pontos Θ e H, e que, além disso, os centros de gravidade das figuras semelhantes são situados

[53]Pelo Postulado 4. De acordo com Mugler, falta aqui a conclusão, [Mug71a, pág. 92]: "o ponto Z é assim o centro de gravidade do triângulo $B\triangle\Gamma$."

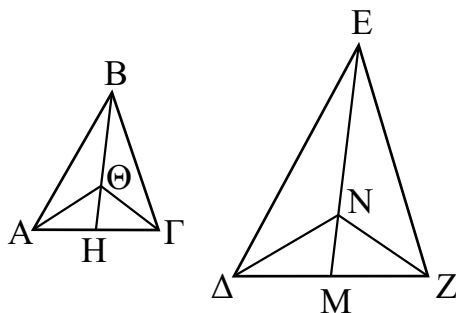
[54]Pela Proposição 4.

[55]Esta proposição parece ser apenas um caso particular do Postulado 5. O significado desta proposição parece ser o de mostrar que este CG é único.

[56]Isto é, com os lados correspondentes. Esta definição é análoga à que aparece no Postulado 5.

[57] Estas são as condições de semelhança entre os triângulos $AB\Gamma$ e $\triangle EZ$. A Proposição 4 do livro VI de *Os Elementos* de Euclides afirma que: "Em triângulos eqüiângulos [isto é, que possuem os três ângulos iguais] os lados ao redor dos ângulos iguais são proporcionais, e os lados que subtendem os ângulos iguais são os lados correspondentes," [Euc56, Vol. 2, pág. 200].

semelhantemente, de modo que as retas que os ligam aos vértices fazem ângulos iguais com as retas homólogas, o ângulo $H\Delta E$ é igual ao ângulo ΘAB.[58] Mas o ângulo ΘAB é igual ao ângulo $E\Delta N$[59] em virtude da situação semelhante dos pontos Θ e N. Segue-se que o ângulo $E\Delta N$ também é igual ao ângulo $E\Delta H$, isto é, que um ângulo maior é igual a um ângulo menor, o que é impossível. Portanto, o ponto N não poderá não ser o centro de gravidade do triângulo ΔEZ. Portanto, N é o centro de gravidade [do triângulo EZ].

[Proposição] 12. Sendo dados dois triângulos semelhantes, se o centro de gravidade de um [dos triângulos] está situado sobre a linha reta traçada de um dos vértices ao ponto médio da base [do lado oposto], o centro de gravidade do outro triângulo estará igualmente situado sobre a linha reta traçada semelhantemente.

Sejam $AB\Gamma$ e ΔEZ os dois triângulos. [Vamos supor] que $A\Gamma$ esteja para ΔZ assim como AB está para ΔE e assim como $B\Gamma$ está para ZE.[60] Dividimos o lado $A\Gamma$ em duas partes iguais pelo ponto H e traçamos a reta BH. [Vamos supor] que Θ, o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$, esteja situado sobre BH. Afirmo que, também para o triângulo $E\Delta Z$, o centro de gravidade está situado sobre a linha reta traçada semelhantemente.

Dividimos ΔZ em duas partes iguais pelo ponto M, traçamos EM e [pegamos sobre EM um ponto N de maneira] que BH esteja para $B\Theta$ assim como ME está para EN. Traçamos as retas $A\Theta$, $\Theta\Gamma$, ΔN, NZ. Como AH é a metade de ΓA e ΔM é a metade de ΔZ, temos também a igualdade entre a razão de BA para $E\Delta$ e a razão de AH para ΔM. Os lados que compreendem os ângulos iguais[61] são, além disso, proporcionais. Segue-se que o ângulo AHB é igual ao ângulo ΔME[62] e que AH está para ΔM assim como BH está para EM.[63] Mas temos também que BH está para $B\Theta$ assim como ME

[58] Pelo Postulado 5.

[59] Novamente pelo Postulado 5.

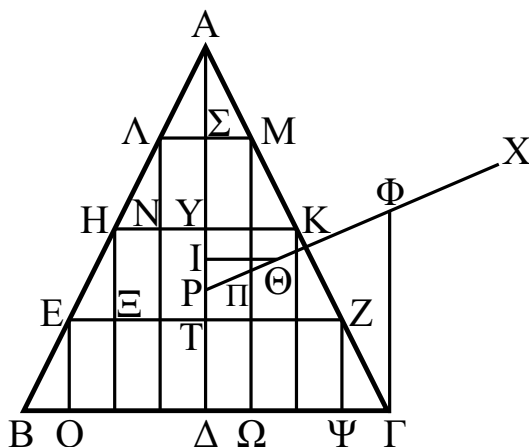
[60] Estas são as condições de semelhança entre os dois triângulos.

[61] Isto é, os ângulos BAH e $E\Delta M$, que são iguais em virtude da semelhança dos triângulos $AB\Gamma$ e ΔEZ.

[62] Conferir a Proposição 6 do livro VI de *Os Elementos* de Euclides: "Se dois triângulos possuem um ângulo igual a um ângulo e se os lados ao redor dos ângulos iguais são proporcionais, os triângulos serão eqüiangulares e terão como ângulos iguais os ângulos subtendidos pelos lados correspondentes," [Euc56, Vol. 2, pág. 204].

[63] Conferir a Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, apresentada na Nota

está para EN. Portanto, por identidade, a razão de AB para $\triangle E$ é igual à razão de $B\Theta$ para EN.[64] Além disso, os lados que compreendem os ângulos iguais são proporcionais. Nestas condições, o ângulo $BA\Theta$ é igual ao ângulo $E\triangle N$. Conseqüentemente, o ângulo $\Theta A\Gamma$ que resta[65] é igual ao ângulo $N\triangle Z$. Mas pelos mesmos motivos o ângulo $B\Gamma\Theta$ é igual ao ângulo EZN, e o ângulo $\Theta\Gamma H$ é igual ao ângulo NZM. Como havíamos mostrado que também o ângulo $AB\Theta$ é igual ao ângulo $\triangle EM$, o ângulo $\Theta B\Gamma$ que resta é igual, por sua vez, ao ângulo NEZ.[66] Por todos estes motivos, os pontos Θ e N estão situados semelhantemente, fazendo ângulos iguais com os lados homólogos. Portanto, a partir do momento em que os pontos Θ e N estão situados semelhantemente e que Θ é o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$, também o ponto N é o centro de gravidade do triângulo $\triangle EZ$.

[Proposição] 13. Em todo triângulo, o centro de gravidade está situado sobre a reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto.

57

[64]Conferir as Proposições 17 e 22 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides. Proposição 17: "Se grandezas que estão compostas forem proporcionais, elas também serão proporcionais estando separadas," [Euc56, Vol. 2, pág. 166]. Isto é, se temos um segmento de reta AB dividido em algum ponto E e um outro segmento de reta CD dividido em um ponto F, as grandezas compostas serão proporcionais se $AB/BE = CD/DF$. O que a proposição afirma é que estas grandezas divididas ou separadas também serão proporcionais. Isto é, $AE/EB = CF/FD$. Proposição 22: "Se houver um número qualquer de grandezas, e outras iguais a estas em quantidade, as quais consideradas duas a duas estão na mesma razão, por igual elas também estarão na mesma razão," [Euc56, Vol. 2, pág. 179]. Seja dado um número qualquer de grandezas A, B, C, e um outro número igual de grandezas D, E, F, as quais, consideradas duas a duas, estão na mesma razão. Isto é, $A/B = D/E$ e $B/C = E/F$. O que a proposição afirma é que $A/C = D/F$.

[65]Após a subtração do ângulo $BA\Theta$ do ângulo BAH, e após a subtração do ângulo $E\triangle N$ do ângulo $E\triangle M$.

[66]Após subtração da soma dos ângulos $AB\Theta$, $B\Gamma\Theta$, $\Theta\Gamma H$, $HA\Theta$, ΘAB da soma dos ângulos do triângulo $AB\Gamma$, e subtração da soma dos ângulos $\triangle EN$, EZN, NZM, $M\triangle N$, $N\triangle E$ da soma dos ângulos do triângulo $\triangle EZ$.

Seja $AB\Gamma$ o triângulo e trace dentro deste triângulo a linha reta $A\triangle$ ligando [o vértice A] ao ponto médio do lado $B\Gamma$. É necessário demonstrar que o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ está situado sobre a reta $A\triangle$.

[Suponha] que não seja assim, mas, se possível, que o centro de gravidade seja o ponto Θ.[67] Tracemos por Θ a [linha reta] ΘI paralela a $B\Gamma$. Se, além disso, o segmento $\triangle\Gamma$ for dividido continuamente em duas partes iguais,[68] chegará um momento no qual o segmento restante[69] será inferior a ΘI. Façamos a divisão de cada um dos segmentos $B\triangle$ e $\triangle\Gamma$ em partes iguais [a este resto $\triangle\Omega$], tracemos pelos pontos de divisão as [linhas retas] paralelas à [linha reta] $A\triangle$ e tracemos as retas EZ, HK e ΛM, que serão, então, paralelas a $B\Gamma$. Portanto, o centro de gravidade está, no caso do paralelogramo MN sobre a reta $\Upsilon\Sigma$, no caso do paralelogramo $K\Xi$ sobre [a reta] $T\Upsilon$, no caso do paralelogramo ZO sobre [a reta] $T\triangle$.[70] Segue-se que no caso da grandeza composta por todos estes paralelogramos o centro de gravidade está sobre a reta $\Sigma\triangle$.[71] [Suponha] que este centro [de gravidade] seja o ponto P. Ligamos P a Θ, prolongamos $P\Theta$ e fazemos $\Gamma\Phi$ paralelo a $A\triangle$.[72] A razão [da área] do triângulo $A\triangle\Gamma$ para a soma [das áreas] dos triângulos sobre AM, MK, KZ, $Z\Gamma$, semelhantes ao triângulo $A\triangle\Gamma$, é igual[73] à razão de ΓA para AM, em virtude da igualdade dos segmentos AM, MK, $Z\Gamma$, KZ. Mas como, por outro lado, a razão [da área] do triângulo $A\triangle B$ para a soma [das áreas] dos triângulos semelhantes construídos sobre $A\Lambda$, ΛH, HE, EB é igual à razão de BA para $A\Lambda$, [a área do] o triângulo $AB\Gamma$ está para a soma [das áreas] dos triângulos indicados assim como ΓA está para AM. Mas a razão de ΓA para AM é superior à razão de ΦP para $P\Theta$; pois a razão de ΓA para AM é igual à razão de ΦP para $P\Pi$ em virtude da semelhança

[67] Pelo Postulado 7 vem que o ponto Θ tem de estar dentro do triângulo $AB\Gamma$.

[68] Isto é, divide-se $\triangle\Gamma$ em duas partes iguais, depois divide-se cada uma destas partes em duas partes iguais, e assim sucessivamente.

[69] Isto é, o segmento $\triangle\Omega$ na figura.

[70] Pela Proposição 9.

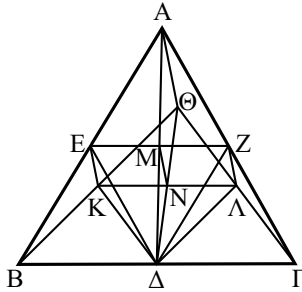
[71] Nas Proposições 4 a 7 Arquimedes sempre chega que o CG da grandeza composta por duas grandezas A e B de pesos iguais ou diferentes está ao longo da linha reta unindo os centros de gravidade de A e de B. Por composição (isto é, obtendo o CG de A com B, depois o CG desta composição juntamente com C, e assim por diante), vem que o CG de uma grandeza composta por outras N grandezas de pesos quaisquer cujos centros de gravidade estão ao longo de uma mesma linha reta também vai estar ao longo desta linha reta.

[72] Isto é, encontra-se um ponto Φ sobre o prolongamento de $P\Theta$ tal que $\Phi\Gamma$ seja paralelo à reta $A\triangle$. Ou então traça-se pelo ponto Γ uma reta paralela à reta $A\triangle$ e chama-se de Φ ao cruzamento desta reta com o prolongamento da reta $P\Theta$.

[73] Conferir as Proposições 16 e 18 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides, assim como a Proposição 2 do Livro VI. Proposição 16: "Se quatro grandezas são proporcionais, também serão proporcionais alternadamente," [Euc56, Vol. 2, pág. 164]. Isto é, se $A/B = C/D$, então $A/C = B/D$. Proposição 18: "Se grandezas estando divididas forem proporcionais, então também serão proporcionais estando compostas," [Euc56, Vol. 2, pág. 169]. Sejam, por exemplo, dois segmentos de reta AB e CD divididos nos pontos E e F, respectivamente. Logo, se $AE/EB = CF/FD$, então $AB/BE = CD/FD$. Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides: "Se for traçada uma linha reta paralela a um dos lados de um triângulo, ela cortará os lados do triângulo proporcionalmente; e, se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a linha reta ligando os pontos de corte será paralela ao lado remanescente do triângulo," [Euc56, Vol. 2, pág. 194].

dos triângulos.[74] Assim a razão do triângulo $AB\Gamma$ para a soma dos triângulos indicados é superior à razão de ΦP para $P\Theta$. Segue-se, por dissociação, que também a razão da soma [das áreas] dos paralelogramos MN, $K\Xi$, ZO para os triângulos restantes é superior à razão de $\Phi\Theta$ para ΘP. Seja, portanto, uma razão de $X\Theta$ para ΘP igual à razão da soma dos paralelogramos com a soma dos triângulos.[75] Como temos uma certa grandeza, o triângulo $AB\Gamma$, cujo centro de gravidade é o ponto Θ, da qual retiramos a grandeza composta pelos paralelogramos MN, $K\Xi$, ZO, e como o centro de gravidade da grandeza retirada é o ponto P, o centro de gravidade da grandeza restante, composta pelos triângulos que sobraram, está situado sobre o prolongamento da linha reta $P\Theta$, sobre a qual cortamos um segmento que tem para ΘP a [mesma] razão que tem a grandeza retirada para a grandeza restante.[76] Portanto, o ponto X é o centro de gravidade da grandeza composta pelos triângulos restantes, o que é impossível, pois todos [estes triângulos] estão situados de um mesmo lado da linha reta passando pelo ponto X paralelamente à [linha reta] $A\triangle$.[77] Portanto, a proposição é evidente.

Outra demonstração da mesma Proposição

Seja o triângulo $AB\Gamma$. Tracemos a linha reta $A\triangle$ ligando A ao ponto médio do lado $B\Gamma$. Afirmo que o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ está situado sobre $A\triangle$.

[74]O ponto Π é o encontro do segmento $P\Theta$ com a reta ΩM.

[75]De fato, $X\Theta$ é superior a $P\Theta$, conferir a Proposição 8 do Livro V de *Os Elementos* de Euclides: "De duas grandezas desiguais, a maior tem para uma terceira grandeza qualquer uma razão maior do que a menor tem para a mesma terceira grandeza. E esta terceira grandeza tem para a grandeza menor uma razão maior do que a terceira grandeza tem para a grandeza maior," [Euc56, Vol. 2, pág. 149].

[76]Conferir a Proposição 8.

[77]De acordo com Dijksterhuis, [Dij87, págs. 310-311], Heiberg afirma que esta última conclusão é baseada no Postulado 7. Já Dijksterhuis discorda disto, pois o perímetro da figura composta por todos os triângulos BOE, $E\Xi H$, ..., $\Psi\Gamma Z$ não é "côncavo na mesma direção." Por este motivo Dijksterhuis acredita que se deve imaginar que a última conclusão foi feita baseada na consideração de que, se é encontrado o centro de gravidade de uma figura cujas partes componentes estão todas do mesmo lado de uma linha reta, ao combinar com a ajuda da Proposição 6 duas partes, combinando esta combinação com uma terceira parte, etc., então o centro de gravidade de toda a figura tem de estar sobre o mesmo lado da linha reta no qual se encontram todas as partes.

Com efeito, [suponhamos] que não seja assim, mas que o centro de gravidade seja, se possível, o ponto Θ. Tracemos as linhas retas $A\Theta$, ΘB e $\Theta\Gamma$ e liguemos os pontos médios dos lados BA, $A\Gamma$ [e $B\Gamma$] pelas retas $E\triangle$ e ZE. Tracemos EK e $Z\Lambda$ paralelamente à [linha reta] $A\Theta$, e tracemos as retas $K\Lambda$, $\Lambda\triangle$, $\triangle K$, $\triangle\Theta$ e MN. Como o triângulo $AB\Gamma$ é semelhante ao triângulo $\triangle Z\Gamma$, pois BA é paralelo[78] a $Z\triangle$, e como, além disso, o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ é o ponto Θ [por hipótese], [então] o centro de gravidade do triângulo $Z\triangle\Gamma$ é o ponto Λ.[79] Pois os pontos Θ e Λ estão situados semelhantemente em cada um dos triângulos. Pelos mesmos motivos, também dentro do triângulo $EB\triangle$, o centro de gravidade é o ponto K, de maneira que o centro de gravidade da grandeza que é a soma dos dois triângulos $EB\triangle$ e $Z\triangle\Gamma$ está situado sobre o ponto médio do segmento de reta $K\Lambda$.[80] Mas o ponto médio do segmento $K\Lambda$ é o ponto N, pois BK está para ΘK assim como BE está para EA,[81] e, além disso, $\Gamma\Lambda$ está para $\Lambda\Theta$ assim como ΓZ está para ZA, e porque, nestas condições, $B\Gamma$ é paralelo a $K\Lambda$.[82] Além disso, traçamos a reta $\triangle\Theta$. Portanto, o segmento KN está para o segmento $N\Lambda$ assim como $B\triangle$ está para $\triangle\Gamma$. Segue-se que o centro de gravidade da grandeza que é a soma dos dois triângulos indicados é o ponto N.[83] Por outro lado, no paralelogramo $AE\triangle Z$, o centro de gravidade é o ponto M,[84] de maneira que o centro de gravidade da grandeza que é a soma de todas as grandezas está situado sobre a reta MN.[85] Mas, [por hipótese], o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ também é o ponto Θ. Conseqüentemente, o prolongamento da linha reta MN passará pelo ponto Θ, o que é impossível.[86] Portanto, o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ não pode não estar situado sobre a linha reta $A\triangle$. Portanto, ele está situado sobre esta reta.

[Proposição] 14. Em todo triângulo o centro de gravidade é o ponto de encontro das linhas retas ligando os vértices do triângulo aos pontos médios dos lados [opostos].

---

[78]Pois $A\Gamma/Z\Gamma = B\Gamma/\triangle\Gamma = 2$. Conferir a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, apresentada na Nota 73.

[79]O ponto Λ é o ponto homólogo (ou correspondente) ao ponto Θ de acordo com a Proposição 11. Esta conclusão vem também do Postulado 5.

[80]Pela Proposição 4.

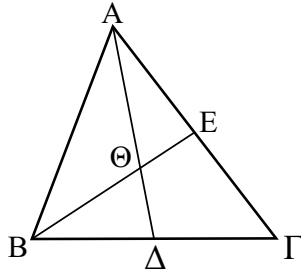
[81]Pela Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, apresentada na Nota 73.

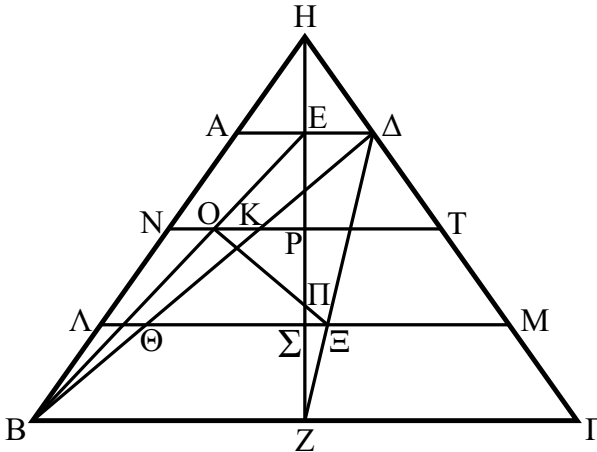
[82]A partir do momento em que $BE/EA = \Gamma Z/AZ$, temos $\Gamma\Lambda/\Lambda\Theta = BK/K\Theta$. Conferir a Proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, apresentada na Nota 73.

[83]Arquimedes está substituindo o conjunto dos dois triângulos $Z\triangle\Gamma$ e $EB\triangle$ por um único corpo de peso igual à soma destes dois triângulos, atuando no ponto N. Ou seja, está usando implicitamente o Postulado 6.

[84]Pela Proposição 10.

[85]Nas Proposições 6 e 7 Arquimedes mostra que o CG de uma grandeza composta de outras duas grandezas A e B está ao longo da linha reta unindo o CG de A com o CG de B.

[86]De fato, as retas MN, $Z\Lambda$ e $A\Theta$ são paralelas, pois $EM = MZ$ e $KN = N\Lambda$.

Seja $AB\Gamma$ o triângulo. Tracemos a linha reta $A\triangle$ ligando A ao ponto médio de $B\Gamma$, e a linha reta BE ligando B ao ponto médio E de $A\Gamma$. O centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ estará assim situado sobre cada uma das duas retas $A\triangle$ e BE, pois isto foi demonstrado.[87] Portanto, o ponto Θ é o centro de gravidade.

[Proposição] 15. Em todo trapézio que possui dois lados paralelos entre si, o centro de gravidade está situado sobre o segmento de reta ligando os pontos médios dos lados paralelos em um ponto que divide este segmento de maneira que o segmento parcial que tem como extremidade o ponto médio do menor dos lados paralelos está para o segmento restante assim como a soma do dobro do lado maior e do lado menor, paralelos entre si, está para a soma do dobro do lado menor e do lado maior, paralelos entre si.[88]

Seja $AB\Gamma\triangle$ o trapézio que tem $A\triangle$ e $B\Gamma$ como seus lados paralelos, e seja EZ o segmento de reta ligando os pontos médios dos lados $A\triangle$ e $B\Gamma$. Logo, é evidente que o centro de gravidade do trapézio está situado sobre EZ. De fato,

[87]Na Proposição 13.

[88]Isto é, na figura desta proposição temos o trapézio $AB\Gamma\triangle$. Arquimedes vai demonstrar que seu CG é o ponto Π ligando os pontos médios de $A\triangle$ e de $B\Gamma$ (ou seja, ligando os pontos E e Z, respectivamente), tal que $\Pi E/\Pi Z = (2B\Gamma + A\triangle)/(2A\triangle + B\Gamma)$.

ao prolongar os segmentos $\Gamma\triangle H$, ZEH e BAH, é manifesto que eles convergem sobre um mesmo ponto, que o centro de gravidade do triângulo $HB\Gamma$ estará situado sobre o segmento de reta HZ, e que o centro de gravidade do triângulo $AH\triangle$ estará situado semelhantemente sobre o segmento EH.[89] Segue-se que o centro de gravidade do trapézio restante $AB\Gamma\triangle$ estará situado sobre EZ.[90] Liguemos os pontos B e $\triangle$ e façamos a divisão de $B\triangle$ em três partes iguais através dos pontos K e Θ. Tracemos através dos pontos K e Θ as [retas] $\Lambda\Theta M$ e NKT paralelas à [reta] $B\Gamma$, e tracemos as retas $\triangle Z$, BE e $O\Xi$. O centro de gravidade do triângulo $\triangle B\Gamma$ estará assim situado sobre ΘM, pois ΘB é a terça parte de $B\triangle$[91] e pelo fato de que $M\Theta$ foi traçado através de Θ paralelamente à base. Mas o centro de gravidade do triângulo $\triangle B\Gamma$ também está situado sobre $\triangle Z$, de maneira que o ponto Ξ é o centro de gravidade do triângulo indicado. Contudo, pelos mesmos motivos o ponto O é o centro de gravidade do triângulo $AB\triangle$. Segue-se que para a grandeza que é a soma dos triângulos $AB\triangle$ e $B\triangle\Gamma$, a saber, para o trapézio, o centro de gravidade está situado sobre $O\Xi$. Mas o centro de gravidade do trapézio indicado também está situado sobre EZ, de modo que no trapézio $AB\Gamma\triangle$ o centro de gravidade é o ponto Π. Por outro lado, a razão [da área] do triângulo $B\triangle\Gamma$ para o triângulo $AB\triangle$ será igual à razão de $O\Pi$ para $\Pi\Xi$.[92] Mas a razão [da área] do triângulo $B\triangle\Gamma$ para o triângulo $AB\triangle$ é igual à razão de $B\Gamma$ para $A\triangle$,[93] e a razão de $O\Pi$ para $\Pi\Xi$ é igual à razão de $P\Pi$ para $\Pi\Sigma$,[94] de modo que $B\Gamma$ está para $A\triangle$ assim como $P\Pi$ está para $\Pi\Sigma$. Conseqüentemente, a razão da soma do dobro de $B\Gamma$ e de $A\triangle$ para a soma do dobro de $A\triangle$ e de $B\Gamma$ é igual à razão da soma do dobro de $P\Pi$ e de $\Pi\Sigma$ para a soma do dobro de $\Pi\Sigma$ e de ΠP. Mas o dobro de $P\Pi$ aumentado de $\Pi\Sigma$ é igual à soma de ΣP e de $P\Pi$, que é, ela mesma, igual a ΠE,[95] e o dobro de $\Pi\Sigma$ aumentado de ΠP é igual à soma de $P\Sigma$ e de $\Sigma\Pi$, que é, ela mesma, igual a ΠZ.[96] Portanto, a proposição está demonstrada.

[89] Pela Proposição 13.

[90] Pela Proposição 8.

[91] Pela Proposição 14.

[92] Conferir as Proposições 6 e 7.

[93] Conferir a Proposição 1 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides: "Triângulos e paralelogramos que possuem a mesma altura estão um para o outro assim como suas bases," [Euc56, Vol. 2, pág. 191]. Isto é, sejam ABC e ACD dois triângulos de bases BC e CD (com os pontos B, C e D ao longo de uma mesma reta) que possuem o mesmo vértice A e a mesma altura. Então a área de ABC está para a área de ACD assim como BC/CD.

[94] Em razão da semelhança dos triângulos $OP\Pi$ e $\Sigma\Pi\Xi$. Conferir a Proposição 4 do Livro VI de *Os Elementos* de Euclides, apresentada na Nota 57.

[95] Temos, com efeito, $EP = P\Sigma = \Sigma Z$, pois $AN = N\Lambda = BA$, e pelo fato das retas NT, ΛM e $B\Gamma$ serem paralelas.

[96] É necessário completar a demonstração pela seguinte conclusão: $(2B\Gamma + A\triangle)/(2A\triangle + B\Gamma)$ é, portanto, igual a $\Pi E/\Pi Z$.

Referências Bibliográficas

[Arc02] Archimedes. *The Works of Archimedes.* Dover, New York, 2002. Translated and edited in modern notation by T. L. Heath.

[Arq04] Arquimedes. Sobre o equilíbrio dos planos (segunda parte). *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 2:146–157, 2004. Introdução e tradução de A. K. T. Assis e N. B. F. Campos.

[Ass96] A. K. T. Assis. Sobre os corpos flutuantes - tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 16:69–80, 1996.

[Ass97] A. K. T. Assis. Sobre o equilíbrio dos planos - tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 18:81–94, 1997.

[Ass08] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics.* Apeiron, Montreal, 2008. ISBN: 978-0-9732911-6-2. Available in PDF format at: http://www.ifi.unicamp.br/˜assis/.

[BRS03] W. G. Boltz, J. Renn, and M. Schemmel. Mechanics in the Mohist canon and its European counterpart: texts and contexts. Preprint 241 of the Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, 2003.

[Cla79] M. Clagett. *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* The University of Wisconsin Press, Madison, 1979.

[Dij87] E. J. Dijksterhuis. *Archimedes.* Princeton University Press, Princeton, 1987. Translated by C. Dikshoorn.

[Dow79] D. Dowson. *History of Tribology.* Longman, London, 1979.

[Duh05] P. Duhem. *Les Origines de la Statique*, volume 1. Hermann, Paris, 1905.

[Duh06] P. Duhem. *Les Origines de la Statique*, volume 2. Hermann, Paris, 1906.

[Duh91] P. Duhem. *The Origins of Statics*, volume 123 of *Boston Studies in the Philosophy of Science*. Kluwer, Dordrecht, 1991. Translated by G. F. Leneaux, V. N. Vagliente and G. H. Wagener.

[Euc] Euclid. *The Book on the Balance*, attributed to Euclid. In M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (The University of Wisconsin Press, Madison, 1979). Document I.I, pp. 24-30. Translated from the Arabic text of F. Woepcke in the *Journal asiatique*, Ser. 4, Vol. *18* (1851), 217-32.

[Euc56] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 1-3, Books I-XIII. Dover, New York, 1956. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath.

[Fer] N. Ferreira. *Mecânica*. Instituto de Física, USP, São Paulo. Projeto RIPE — Rede de Instrumentação para o Ensino.

[Fer06] N. Ferreira. *Equilíbrio*. Projeto RIPE, Instituto de Física, USP, São Paulo, 2006. Disponível em 2008 em: http://www.ludoteca.if.usp.br/.

[Gas03] A. Gaspar. *Experiências de Ciências para o Ensino Fundamental*. Ática, São Paulo, 2003.

[Hea21] T. Heath. *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1921. Vol. II: From Aristarchus to Diophantus.

[Hei15] J. L. Heiberg. *Archimedis Opera*. Teubner, Leipzig, 2nd edition, 1910-15. Repr. 1972. Stuttgart.

[Her88] Heron. Héron d'Alexandrie, *Les Mécaniques* ou *L'Élévateur des Corps Lourds*. Les Belles Lettres, Paris, 1988. Texte arabe de Qusta Ibn Luqa, établi et traduit par B. Carra de Vaux. Introduction par D. R. Hill. Commentaires par A. G. Drachman.

[Kno79] W. R. Knorr. Archimedes and the elements: proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus. *Archive for the History of Exact Sciences*, 19:211–290, 1978-79.

[Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, 1960.

[Mug70] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 1: *De la Sphère et du Cylindre, La Mesure du Cercle, Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes*. Budé, Paris, 1970.

[Mug71a] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 2: *Des Spirales, De l'Équilibre des Figures Planes, L'Arénaire, La Quadrature de la Parabole*. Budé, Paris, 1971.

[Mug71b] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 3: *Des Corps Flottants, Stomachion, La Méthode, Le Livre des Lemmes, Le Problème des Boeufs*. Budé, Paris, 1971.

[Mug72] C. Mugler. *Les Oeuvres d'Archimède*, volume 4: *Commentaires d'Eutocius et Fragments*. Budé, Paris, 1972.

[Net] L. F. Netto. Máquinas Simples - (Parte 2 - Alavancas. Disponível em (acessado em 2008): http://www.feiradeciencias.com.br/sala06/06_RE02.asp.

[NN07] R. Netz and W. Noel. *Il Codice Perduto di Archimede*. Rizzoli, Milano, 2007. Traduzione di C. Capararo.

[Pap82] Pappus. Pappus d'Alexandrie*, La Collection Mathématique*. Albert Blanchard, Paris, 1982. 2 volumes. Translation by P. V. Eecke.

[Plu] Plutarch. *Marcellus*. Translated by J. Dryden. Available in 2008 at: http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html.

[Ror] C. Rorres. *Archimedes*. Available in 2008 at: http://www.math.nyu.edu/˜crorres/Archimedes/contents.html. Site created and maintained by C. Rorres.

[sea] *Seara da Ciência*. Site available in 2008 at: http://www.seara.ufc.br/.

[Ste30] W. Stein. Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie. Abt. B: Quellen. I*, pages 221–244, 1930.

[Sym82] K. R. Symon. *Mecânica*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 5^a edição, 1982. Tradução de G. B. Batista.

[tho] Thomson, G. D., The origin of the Zodiac. Available in 2008 at: http://members.optusnet.com.au/˜gtosiris/page9a.html.

[Wal08] J. Walker. *O Circo Voador da Física*. LTC, Rio de Janeiro, 2008. Segunda edição. Tradução de C. C. d. Biasi, revisão técnica de R. S. d. Biasi.

Errata do livro “Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca,” A. K. T. Assis (Apeiron, Montreal, 2008),
ISBN: 978-0-9732911-7-9.

Agradeço a Emely Giron dos Santos por algumas destas correções.

- Pág. 23, a sexta linha do segundo parágrafo deve ser:

IX ou X pertenceu ao humanista Giorgio Valla, que ensinou em Veneza entre

- Pág. 50, a última linha deve ser:

corpo ao seu centro geométrico. Este ponto será representado nas figuras pelas

- Pág. 82, a quinta linha de baixo para cima deve ser:

dado por $h_{CG} = 2^{1/2} c/2 \approx 0{,}7c$. Se $c = 3b$ temos $\alpha = 71{,}6^{\text{o}}$ e $\theta_c = 18{,}4^{\text{o}}$.

- Pág. 83, a primeira linha deve ser:

Destas condições concluímos então que quanto mais baixo está o *CG* de um

- Pág. 131, a quarta linha deve ser:

que a parte próxima do vértice do segmento tem uma vez e meia o comprimento da

- Pág. 137, a última linha deve ser:

fases da Lua, até as sombras de um gnômon. Um gnômon é uma haste vertical fincada no solo

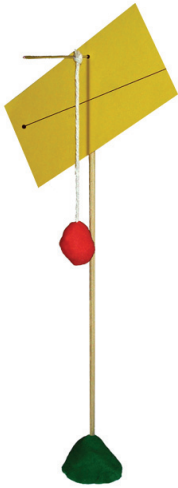
- Pág. 170, a 8ª linha debaixo para cima deve ser:

de *C*, então diz-se que *A* e *B* são incomensuráveis.

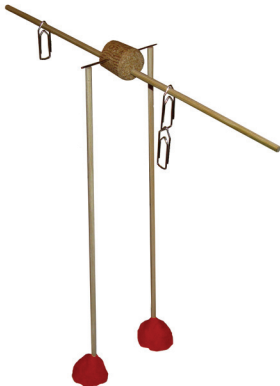
- Pág. 193, a 12ª e a 11ª linhas de baixo para cima devem ser:

como um plano cartesiano, para facilitar a análise. Vamos colocar dois eixos *x* e *y* paralelos aos lados do retângulo, com o centro (0, 0) deste sistema

- Pág. 211, a última linha deve ser:

ponto *H*, e se a linha *CZ* for considerada igual à linha *TW*, e se dois pesos,

Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca é um livro que lida com os aspectos fundamentais da física. Descreve os principais eventos na vida de Arquimedes e o conteúdo de suas obras. Discute um grande número de experiências relacionadas com o equilíbrio de corpos suspensos que estão sob a ação gravitacional terrestre. Todas as experiências são descritas com clareza e realizadas com materiais simples, baratos e facilmente acessíveis. Estas experiências levam a uma definição conceitual precisa do centro de gravidade e ilustram procedimentos práticos para encontrá-lo com precisão. São analisadas as condições de equilíbrio estável, neutro e instável. São descritos e explicados muitos brinquedos de equilíbrio. Aspectos históricos relacionados a este conceito são apresentados, juntamente com os valores teóricos do centro de gravidade de diversos corpos obtidos por Arquimedes. O livro também explica como construir e calibrar balanças e alavancas precisas e sensíveis. São realizadas diversas experiências com estes instrumentos até se chegar a uma definição matemática do centro de gravidade e à lei da alavanca, também chamada de primeira lei da mecânica. São descritas diversas conseqüências desta lei, assim como diferentes demonstrações de como se chegar nela. É feita uma análise detalhada das obras de Euclides e de Arquimedes, assim como uma tradução de duas obras destes autores. Uma ampla bibliografia é incluída no final da obra.

Sobre o Autor

André Koch Torres Assis nasceu no Brasil em 1962. Formou-se no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, obtendo o bacharelado em 1983 e o doutorado em 1987. Passou o ano de 1988 na Inglaterra realizando um pós-doutorado no Culham Laboratory (United Kingdom Atomic Energy Authority). Passou um ano entre 1991-92 como Visiting Scholar no Center for Electromagnetics Research da Northeastern University (Boston, EUA). De Agosto de 2001 a Novembro de 2002 trabalhou no Institut für Geschichte der Naturwissenschaften da Universidade de Hamburg, Alemanha, com uma bolsa de pesquisa concedida pela Fundação Alexander von Humboldt da Alemanha. É autor de diversos livros em português e inglês, dentro os quais se destacam *Eletrodinâmica de Weber* (1995), *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos* (juntamente com M. Bueno, 1998), *Mecânica Relacional* (1998), *Uma Nova Física* (1999) e *The Electric Force of a Current* (juntamente com J. A. Hernandes, 2007). Traduziu para o português o livro *Óptica*, de Isaac Newton (1996), assim como *O Universo Vermelho*, de Halton Arp (juntamente com D. Soares, 2001). É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989 trabalhando com os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia.

ISBN 978-0-9732911-7-9

9 780973 291179